

سؤال‌های دارای پاسخ تشریحی

مجموع جلد‌های دنباله‌های حسابی و هندسی (مجموع جلد‌های دنباله‌های حسابی)

بارم	مرجع	سؤال
۱	امتحان نهایی، شهریور ۹۲ (۵ بار تکرار)	۱. در دنباله‌ی حسابی ... ، ۵ ، ۰ ، -۵ ، مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله را بیابید. (صفحه‌ی ۲، تمرین در کلاس)
۰/۷۵	امتحان نهایی، دی ۹۳ (۷ بار تکرار)	۲. در دنباله‌ی حسابی ... ، ۱۵، ۹، ۳ حداقل چند جمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟ (صفحه‌ی ۵، مشابه مسأله‌ی ۱)
	کرج - شاهد شهید بناهی - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳. اگر $a_n = \frac{1-2n}{3}$ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشد، مجموع جملات آن را تا جمله‌ی بیستم بنویسید. (صفحه‌ی ۲، تمرین در کلاس)
	نطنز - سمیه - ۹۰ (۳ بار تکرار)	۴. با استفاده از دنباله‌ی حسابی نشان دهید: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)
	آزاد شهر - آموزشگاه شاهد - ۹۰ (۱۱ بار تکرار)	۵. مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی ... ، ۱۲، ۷، ۲ برابر ۸۷ می‌شود؟ (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)
	کرج - غیر انتفاعی جامی - ۹۰ (۸ بار تکرار)	۶. جمله‌ی پانزدهم یک دنباله‌ی حسابی ۳۴ و مجموع هشت جمله‌ی اول آن ۲۰ است. مجموع چهار جمله‌ی اول آن را بیابید. (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)
	بناب - تیزهوشان طباطبایی - ۹۰ (۳ بار تکرار)	۷. از معادله‌ی $450 = (44+x) + \dots + (5+x) + (2+x)$ مقدار x را به دست آورید. (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)
	گنبد کاووس - فرزانتگان - ۹۰ (۴ بار تکرار)	۸. دانش‌آموزی می‌خواهد یک وسیله به مبلغ $190/000$ تومان خریداری کند. قرار است پدرش به صورت ماهانه به او پول بدهد، به این ترتیب که ماه اول 10000 تومان و هر ماه 2000 تومان بیشتر از ماه قبل به او پول بدهد. پس از چند ماه این دانش‌آموز می‌تواند این وسیله را خریداری کند؟ (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)

مجموع جلد‌های دنباله‌های حسابی و هندسی (مجموع جلد‌های دنباله‌های هندسی)

۱	امتحان نهایی، خرداد ۹۰ (۷ بار تکرار)	۹. مجموع چند جمله‌ی اول از دنباله‌ی هندسی ... ، ۲۴، -۱۲، ۶ برابر ۱۲۶ - خواهد شد؟ (صفحه‌ی ۴، فعالیت ۱)
	نظرآباد - قلم‌چی - ۹۰ (۴ بار تکرار)	۱۰. در دنباله‌ی ... ، $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{3}$ ، ۱ حداکثر چند عدد را باید جمع کنیم تا حاصل، کمتر از $1/497$ شود؟ (صفحه‌ی ۴، فعالیت ۱)
	صفحه‌ی ۴، فعالیت ۱	۱۱. حاصل $(1-x+x^2-\dots+x^6)(1+x+x^2+\dots+x^6)$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ بیابید.
	اصفهان - نمونه سلامتینان - ۹۰ (۹ بار تکرار)	۱۲. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی ۳۳ برابر مجموع ۵ جمله‌ی اول آن است. قدر نسبت این دنباله را بدست آورید. (صفحه‌ی ۴، فعالیت ۱)
	مردن - علامه امینی - ۹۰ (۱۱ بار تکرار)	۱۳. مربعی به طول ۱ واحد در نظر بگیرید. اگر یک سوم این مربع را رنگ بزنیم و در مرحله‌ی بعد یک سوم مقدار باقیمانده را رنگ آمیزی کنیم و به همین ترتیب ادامه دهیم، بعد از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ می‌شود؟ (صفحه‌ی ۶، مشابه مسأله‌ی ۵)

سؤال‌های دارای پاسخ کوتاه

مجموع جلد‌های دنباله‌های حسابی و هندسی (مجموع جلد‌های دنباله‌های حسابی)



مرجع بارم

۱	امتحان نهایی، دی ۹۱ (۵ بار تکرار)	۱. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را بیابید. $\dots, -1, -3, -5$ (صفحه‌ی ۲، تمرین در کلاس)
۱	امتحان نهایی، شهریور ۹۰ (۷ بار تکرار)	۲. در دنباله‌ی حسابی $\dots, 14, 10, 6, 2$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر نشود؟ (صفحه‌ی ۵، مشابه مسأله‌ی ۱)
	مشهد - حضرت زینب - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = 3n + 2$ است، مجموع بیست جمله‌ی اول آن را بدست آورید. (صفحه‌ی ۲، تمرین در کلاس)
	خرم آباد - غیرانتفاعی بعثت - ۹۰ (۳ بار تکرار)	۴. درستی تساوی زیر را با استفاده از دنباله‌ی حسابی نشان دهید: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ (صفحه‌ی ۲، تمرین در کلاس ۳)
	میانه - سروش سرمد - ۹۰ (۱۱ بار تکرار)	۵. مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی $\dots, 8, 5, 2$ برابر ۴۰ می‌شود؟ (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)
	نظرآباد - نمونه دولتی شمس تبریزی - ۹۰ (۸ بار تکرار)	۶. جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی ۲۱ و جمله‌ی یازدهم آن ۴۵ است. مجموع سی جمله‌ی اول آن را بیابید. (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)
	شهرضا - مهدیه - ۹۰ (۳ بار تکرار)	۷. جواب معادله‌ی $\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{2 + 4 + 6 + \dots + 2n} = \frac{115}{116}$ را به دست آورید. (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)
	قدس - نمونه دولتی ابوتراب - ۹۰ (۴ بار تکرار)	۸. شخصی A ریال در بانک پول دارد. اگر در ماه اول $x_1 = \frac{1}{28}A$ و در ماه دوم $x_2 = x_1 + \frac{1}{28}A$ و در ماه سوم $x_3 = x_2 + \frac{1}{28}A$ و ... از حساب خود برداشت نماید، پس از چند ماه پس‌انداز وی تمام می‌شود؟ (صفحه‌ی ۲، متن کتاب)

مجموع جلد‌های دنباله‌های حسابی و هندسی (مجموع جلد‌های دنباله‌های هندسی)



	کرج - قلم چی - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۹. مجموع چند جمله از دنباله‌ی هندسی $\dots, -81, -27, -9, 3$ برابر ۱۸۳ است؟ (صفحه‌ی ۴، فعالیت ۱)
	همدان - هیئت امنایی مهدیه - ۹۰ (۴ بار تکرار)	۱۰. با شروع از جمله‌ی اول، حداقل چند جمله از دنباله‌ی هندسی $\dots, 9, 3, 1$ را باید جمع کرد تا مجموع آنها بیشتر از ۳۰۰ گردد؟ (صفحه‌ی ۴، فعالیت ۱)
	(صفحه‌ی ۴، فعالیت ۱)	۱۱. حاصل $(\frac{1}{x^9} - \dots - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1)$ را به ازای $x = \frac{1}{p}$ بیابید.
	سمنان - غیرانتفاعی ایران - ۹۰ (۹ بار تکرار)	۱۲. مجموع ۸ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی ۱۷ برابر مجموع چهار جمله‌ی اول آن دنباله است. قدرنسبت این دنباله را بدست آورید. (صفحه‌ی ۴، فعالیت ۱)
	تهران - غیر انتفاعی معلم - ۹۰ (۱۱ بار تکرار)	۱۳. در دایره‌ای در هر مرحله نصف قسمت باقی مانده از دایره را رنگ می‌کنیم. چند مرحله رنگ کنیم تا بیش از ۹۹٪ شکل رنگ شود؟ (صفحه‌ی ۶، مشابه مسأله‌ی ۵)

سؤال‌های دارای پاسخ تشریحی

مرجع بارم

	کرج - غیرانتفاعی رشد نو - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۱۴. برای از بین بردن ذرات معلق در یک محلول، آن را از صافی‌هایی عبور می‌دهیم. اگر در اثر عبور از هر صافی تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف شود، حداقل چه تعداد صافی نیاز است تا تعداد ذرات معلق موجود در محلول حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد؟ (صفحه‌ی ۵، مشابه مسأله‌ی ۵)
۰/۷۵	امتحان نهایی، خرداد ۹۱ (۶ بار تکرار)	۱۵. در دنباله‌ی هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ (صفحه‌ی ۴، قضیه)
	همدان - دارالفنون - ۹۲ (۸ بار تکرار)	۱۶. مجموع زیر را به دست آورید. $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + \dots = ?$ (صفحه‌ی ۴، قضیه)
	اقلید - الزهرا - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۱۷. حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$ (صفحه‌ی ۴، قضیه)
۱/۲۵	امتحان نهایی، خرداد ۹۰ (۷ بار تکرار)	۱۸. توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن، به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه‌ی خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد، می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می‌کند؟ (صفحه‌ی ۴، مشابه مثال)
	رامسر - شهید رجایی - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۱۹. وسط‌های اضلاع یک مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی به وجود آید. این کار را متوالیاً ادامه می‌دهیم. مجموع مساحت همه‌ی مربع‌ها را به دست آورید. (صفحه‌ی ۶، مشابه مسأله‌ی ۶)

تقسیم چند جمله‌ای با بخش پذیری

۰/۷۵	امتحان نهایی، خرداد ۹۳ (۵ بار تکرار)	۲۰. مقدار m را چنان بیابید که چند جمله‌ای $P(x) = 2x^3 - mx^2 + 2x + 1$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۲)
۰/۷۵	امتحان نهایی، دی ۹۲ (۸ بار تکرار)	۲۱. اگر باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $P(x) = 2x^4 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ را بیابید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۳)
۱	امتحان نهایی، خرداد ۹۲	۲۲. $P(x)$ یک چند جمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. $P(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط زیر صدق کند: $P(1) = 1, P(2) = 3$ (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۱)
۱	امتحان نهایی، دی ۸۷ (۷ بار تکرار)	۲۳. در صورتی که دو چند جمله‌ای $2x^2 - 5x + 4$ و $x^2 + ax$ در تقسیم بر $x - 1$ هم‌باقیمانده باشند، مقدار عددی a را مشخص کنید. (صفحه‌ی ۷، مشابه مثال)
	تهران - تقوی‌نیا - ۸۶ (۶ بار تکرار)	۲۴. مقادیر n و m را چنان بیابید که چند جمله‌ای $P(x) = 4x^3 - nx^2 + m$ بر $x^2 + x - 2$ بخش پذیر باشد. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۴)

سؤال‌های دارای پاسخ کوتاه

مرجع بارم

شهرکرد- غیردولتی قلم چی- ۹۰ (۷ بار تکرار)	۱۴. برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آنها نصف می‌شود، حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش‌ها ۹۷ درصد کاهش یابد؟ (صفحه ۵، مشابه مسأله ۵)
قروه- نبی اکرم- ۹۲ (۶ بار تکرار)	۱۵. در دنباله هندسی نامتناهی زیر مجموع تمام جملات را بیابید. $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$ (صفحه ۴، قضیه)
تهران- مفتح- ۹۲ (۸ بار تکرار)	۱۶. حاصل مجموع داده شده را بیابید. $S = -\sqrt{6} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} + \dots$ (صفحه ۴، قضیه)
تهران- کیمیا سعادت- ۹۰ (۷ بار تکرار)	۱۷. حاصل عبارت $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \frac{1}{729} + \dots$ را بدست آورید. (صفحه ۴، قضیه)
نجف آباد- شاهد کوثر- ۹۰ (۷ بار تکرار)	۱۸. یک توپ بسکتبال از ارتفاع ۲۸ متری رها می‌شود و هر بار که به زمین برخورد می‌کند $\frac{2}{3}$ ارتفاع قبلی بالا می‌آید. در مجموع این توپ تا هنگام توقف چند متر جابجا می‌شود؟ (صفحه ۴، مشابه مثال)
کرج- پژوهندگان علم- ۹۰ (۷ بار تکرار)	۱۹. یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید، این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید، مجموع محیط و مساحت مثلث‌های داخلی بدست آمده (با محاسبه‌ی مثلث اولیه) چقدر است؟ (صفحه ۶، مسأله ۶)

تقسیم چند جمله‌ای با و بخش پذیری

۱	۲۰. مقدار m را چنان بیابید که چند جمله‌ای $P(x) = 3x^3 - 2x + 2m$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد. (صفحه ۱۰، مشابه مسأله ۲)
اراک- نمونه کوثر- ۸۶ (۸ بار تکرار)	۲۱. a و b را چنان بیابید که چند جمله‌ای $3x^3 + ax^2 + 2bx - 3$ بر $x - 3$ بخش پذیر بوده و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر -4 باشد. (صفحه ۱۰، مشابه مسأله ۳)
مشابه تمرین کتاب درسی	۲۲. $P(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. $P(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط زیر صدق کند. $P(-2) = 17$ و $P(1) = 2$ (صفحه ۱۰، مشابه مسأله ۱)
همدان- تربیت- ۹۰ (۷ بار تکرار)	۲۳. در صورتی که دو چند جمله‌ای $x^3 - 4x^2 + 5x + a$ و $x^2 + 3x - 2$ در تقسیم بر $x + 2$ هم باقیمانده باشند، مقدار a چقدر است؟ (صفحه ۷، مشابه مثال)
میانه- نمونه دولتی حکمت- ۸۶ (۶ بار تکرار)	۲۴. مقدار m و n را طوری تعیین کنید که $p(x) = x^3 - 2mx^2 + nx - 1$ بر $x^2 + 3x + 2$ بخش پذیر باشد. (صفحه ۱۰، مشابه مسأله ۴)

سؤال‌های دارای پاسخ تشریحی

بارم مرجع

۱	امتحان نهایی، شهریور ۸۹ (۶ بار تکرار)	۲۵. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x مساوی ۲ و بر $x+2$ مساوی ۱ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^2+2x را به دست آورید. (صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
۱/۲۵	امتحان نهایی، دی ۸۷ (۷ بار تکرار)	۲۶. اگر باقیمانده‌ی تقسیم تابع چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+2$ و $x-3$ به ترتیب ۱ و ۲ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-x-6 را حساب کنید. (صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
۱	امتحان نهایی، دی ۹۰ (۸ بار تکرار)	۲۷. a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3-2x^2+ax+2=0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۶)
	تبریز- نمونه دولتی باقرالعلوم- ۸۶ (۶ بار تکرار)	۲۸. نشان دهید $(x-1)$ یک فاکتور $P(x) = x^3 + (k+1)x^2 - 5x - 2k$ می‌باشد، سپس فاکتورهای دیگر $f(x)$ را تعیین کنید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۵)
	بردسیر- نمونه دولتی حضرت فاطمه- ۹۰ (۲ بار تکرار)	۲۹. یک چندجمله‌ای درجه سوم به گونه‌ای بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $(x+1)$ ، $(x-1)$ و $(x+2)$ برابر ۴ و یکی از عامل‌های آن برابر x باشد. (صفحه‌های ۶ تا ۱۰)


 بسط و جدای و مثلث‌خام - باکمال

۱/۲۵	امتحان نهایی، شهریور ۹۳ (۵ بار تکرار)	۳۰. حاصل عبارت $(x-2)^4$ را به دست آورید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۷- الف)
۰/۷۵	امتحان نهایی، شهریور ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳۱. حاصل عبارت $\left(1-\frac{2}{x}\right)^5$ را به دست آورید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۷- ب)
۰/۷۵	امتحان نهایی، دی ۹۳ (۴ بار تکرار)	۳۲. جمله‌ی سوم بسط $\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$ را بنویسید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۷- ب)
	تهران - دهخدا - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳۳. جمله‌ی نهم بسط $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{10}$ را بنویسید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۷- ب)
	گنبد کاووس- آموزشگاه نمونه بقیه‌ا...- ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳۴. جمله‌ی مستقل از x در بسط $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ را بدست آورید. (ترکیبی، صفحه‌های ۸ تا ۱۰)
	تبریز- نمونه دولتی طالقانی- ۹۰ (۴ بار تکرار)	۳۵. در بسط دو جمله‌ای $\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^9$ ضریب جمله‌ی شامل $\sqrt[3]{x^4}$ را محاسبه کنید. (ترکیبی، صفحه‌های ۸ تا ۱۰)
	شیراز- علامه اقبال لاهوری- ۲- ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳۶. مجموع ضرایب بسط $(3x^2+y^4)^n$ به اندازه‌ی ۲۴۰ واحد از مجموع ضرایب بسط $(3\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{y})^n$ بیشتر است. مقدار n را بیابید. (صفحه‌ی ۱۰، تمرین در کلاس ۳)

سؤال‌های دارای پاسخ کوتاه

بارم	مرجع	سؤال
۱/۲۵	امتحان نهایی، دی ۸۸ (۶ بار تکرار)	۲۵. هرگاه باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+3$ و $x-2$ به ترتیب ۲ و ۷ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2+x-6 را به دست آورید. (صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
۱	امتحان نهایی، خرداد ۸۵ (۷ بار تکرار)	۲۶. اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب برابر ۱ و ۴ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر x^2+x-2 را حساب کنید. (صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
	مشهد - فرزانهگان ۱۰۰-۹۰ (۸ بار تکرار)	۲۷. a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $6x^3+ax^2-3x+2=0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را بدست آورید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۶)
۱	امتحان نهایی، دی ۸۴ (۶ بار تکرار)	۲۸. نشان دهید $2x-5$ یک فاکتور $2x^3-3x^2-9x+10$ می‌باشد، سپس فاکتورهای دیگر $f(x)$ را تعیین کنید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۵)
	تهران - غیرانتفاعی ره توشه - ۸۶ (۲ بار تکرار)	۲۹. تابع درجه سومی بنویسید که بر $x-1$ و $x+1$ بخش پذیر بوده و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x+2$ برابر ۱ و بر x برابر -1 باشد. (صفحه‌های ۶ تا ۱۰)


 بطورجمادی و شلث خیام - پایکال

	سمنان - شهید بهشتی - ۹۲ (۵ بار تکرار)	۳۰. حاصل عبارت $(3x+2y)^5$ را به دست آورید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۷-الف)
	ماهشهر - غیردولتی پتروشیمی - ۹۲ (۷ بار تکرار)	۳۱. حاصل عبارت $\left(2+\frac{1}{x}\right)^4$ را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست). (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۷-ب)
	ساری - ناحیه‌ی ۲-۹۲ (۴ بار تکرار)	۳۲. جمله‌ی سوم از بسط $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ را به دست آورید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۷-ب)
	میناب - نمونه خاتم الانبیاء - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳۳. جمله‌ی چهارم بسط $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$ را محاسبه کنید. (صفحه‌ی ۱۰، مشابه مسأله‌ی ۷-ب)
	زاهدان - نمونه نرجس - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳۴. در بسط $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ جمله‌ی فاقد x کدام است؟ (ترکیبی، صفحه‌های ۸ تا ۱۰)
	یزد - نمونه ملک ثابت - ۹۰ (۴ بار تکرار)	۳۵. در بسط $\left(x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$ ضریب $x^3\sqrt{x}$ را بیابید. (ترکیبی، صفحه‌های ۸ تا ۱۰)
	قدس - نمونه دولتی ابوتراب - ۹۰ (۷ بار تکرار)	۳۶. هرگاه مجموع ضرایب بسط $(3x+2)^n$ ، ۱۹ واحد کمتر از مجموع ضرایب بسط $(4x^2+8)^2$ باشد، n را بدست آورید. (صفحه‌ی ۱۰، تمرین در کلاس ۳)

پاسخ‌نامه‌ی فصل اول

پاسخ تشریحی:

فرهاد حامی - فرهاد وهایی

-۱

$$a = -5, d = 0 - (-5) = 5$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \text{ مجموع } n \text{ جمله‌ی اول از رابطه‌ی}$$

به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2(-5) + 19 \times 5) = 850$$

-۲

$$a = 3 \text{ و } d = 9 - 3 = 6$$

مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

باید $S_n > 300$ باشد، لذا:

$$\frac{n}{2}(6 + (n-1)6) > 300 \Rightarrow \frac{n}{2}(6n) > 300$$

$$\Rightarrow n^2 > 100 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n > 10 \rightarrow \min(n) = 11$$

بنابراین حداقل باید ۱۱ جمله را با هم جمع کنیم.

-۳ ابتدا از روی جمله‌ی عمومی، جملات اول و دوم را بدست می‌آوریم و از روی آنها، قدر نسبت را تعیین می‌کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1-4}{3} = -1$$

$$d = a_2 - a_1 = -1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

حال با توجه به فرمول مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی داریم:

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} \left(2 \left(-\frac{1}{3} \right) + 19 \left(-\frac{2}{3} \right) \right)$$

$$= 10 \cdot \left(-\frac{2}{3} - \frac{38}{3} \right) = 10 \cdot \frac{-40}{3} = -\frac{400}{3}$$

-۴ طرف چپ تساوی مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_1 = 2$ و قدر نسبت $d = 4 - 2 = 2$ است. با توجه به فرمول مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(4 + (n-1) \times 2)$$

$$\Rightarrow S_n = n(2 + n - 1) = n(n+1)$$

-۵ در این دنباله $a_1 = 2$ و $d = 7 - 2 = 5$ است. با توجه به فرمول مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 87$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(4 + (n-1) \times 5) = 87$$

$$\Rightarrow n(4 + 5n - 5) = 87 \times 2 = 174$$

$$\Rightarrow 5n^2 - n - 174 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 3480 = 3481$$

$$\Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{3481}}{2 \times 5} = \begin{cases} 6 \\ -\frac{58}{10} \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

بنابراین مجموع ۶ جمله از دنباله‌ی مذکور برابر ۸۷ می‌شود.

-۶ با توجه به فرمول‌های جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی و مجموع جملات آن داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{15} = a_1 + 14d = 34 \quad (*)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{18} = 4(2a_1 + 17d) = 20$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 17d = 5$$

حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 + 14d = 34 \\ 2a_1 + 17d = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} a_1 + 14d = 34 \\ -4a_1 - 17d = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3a_1 = 24 \Rightarrow a_1 = -8 \Rightarrow -8 + 14d = 34$$

$$\Rightarrow 14d = 42 \Rightarrow d = 3$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10(-16 + 57) = 200$$

-۷ از آنجایی که

$$a = 2 + x \text{ و } d = (5 + x) - (2 + x) = 3$$

و مجموع n جمله‌ی آن ۴۵۰ است، کافی است تعداد جملات را بیابیم.

$$a_n = 44 + x \text{ و } a_1 = 2 + x$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$44 + x = 2 + x + (n-1) \times 3$$

$$\Rightarrow 42 = 3(n-1) \Rightarrow n = 15$$

پس:

$$S_{15} = 450$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2(2+x) + (15-1) \times 3) = 450$$

$$\Rightarrow 2(2+x) + 42 = 60 \Rightarrow 4 + 2x + 42 = 60$$

$$\Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

-۸ پول‌هایی که در ماه‌های مختلف به دانش‌آموز داده می‌شود، تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند.

$$1000, 1200, 1400, 1600, \dots$$

۱۱- پراتنز اول مجموع هفت جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت x است و پراتنز دوم مجموع هفت جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت $-x$ است.

$$\begin{cases} 1+x+x^2+\dots+x^6 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} \\ = \frac{1(1-x^7)}{1-x} = \frac{1-x^7}{1-x} \\ 1-x+x^2-\dots+x^6 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} \\ = \frac{1(1-(-x)^7)}{1-(-x)} = \frac{1+x^7}{1+x} \end{cases}$$

بنابراین عبارت داده شده برابر است با:

$$\frac{1-x^7}{1-x} \times \frac{1+x^7}{1+x} = \frac{1-x^{14}}{1-x^2} = \frac{1-\sqrt{2}^{14}}{1-\sqrt{2}^2} = \frac{1-2^7}{1-2} = 127$$

۱۲- با استفاده از فرمول مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\frac{S_1}{S_5} = \frac{\frac{a_1(1-q^1)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}} = 33 \Rightarrow \frac{1-q^1}{1-q^5} = 33$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^1}{1-q^5} = 33 \Rightarrow \frac{(1-q^5)(1+q^5)}{1-q^5} = 33$$

$$\Rightarrow 1+q^5 = 33 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

۱۳- مساحت مربعی به ضلع ۱ برابر ۱ است. اگر $\frac{1}{3}$ آن را رنگ

بزنیم، $\frac{2}{3}$ آن باقی می‌ماند. حال $\frac{1}{3}$ مقدار باقی‌مانده یعنی

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

باقی می‌ماند. مجدداً $\frac{1}{3}$ آن را رنگ می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. در واقع مقدار مساحت رنگ شده از مربع در هر مرحله، از کل مساحت مربع، دنباله‌ی هندسی زیر را تشکیل می‌دهد:

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{27}, \dots$$

در این دنباله $a_1 = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{4}{9}$ است. حال مجموع جملات این دنباله باید از ۹۹ درصد مساحت مربع بیشتر شود.

در این دنباله جمله‌ی اول $a_1 = 10000$ و قدر نسبت $d = 2000$ است. حال از فرمول مجموع n جمله‌ی اول دنباله استفاده می‌کنیم. مجموع این جملات باید ۱۹۰۰۰۰ شود.

$$S_n \geq 190000 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \geq 190000$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(20000 + (n-1) \times 2000) \geq 190000$$

$$\Rightarrow 2000 \times \frac{n}{2}(10 + n - 1) \geq 190000$$

$$\Rightarrow n(n+9) \geq 190 \Rightarrow n^2 + 9n - 190 \geq 0$$

$$\Delta = 81 + 760 = 841$$

$$\Rightarrow n = \frac{-9 \pm \sqrt{841}}{2} = \begin{cases} 10 \\ -\frac{38}{2} \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

یعنی بعد از ۱۰ ماه می‌تواند آن وسیله را خریداری کند.

۹- در این دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اول $a_1 = 6$ و

$$\text{قدرنسبت } q = -2 = \frac{-12}{6} \text{ است.}$$

با توجه به فرمول S_n داریم:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow -126 = \frac{6((-2)^n - 1)}{(-2) - 1}$$

$$\Rightarrow 126 \times 3 = 6((-2)^n - 1)$$

$$\Rightarrow 21 \times 3 = (-2)^n - 1 \Rightarrow (-2)^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

بنابراین مجموع شش جمله‌ی اول این دنباله برابر ۱۲۶ است.

۱۰- کافی است مجموع n جمله‌ی اول این دنباله را نوشته و نامعادله‌ی

$$S_n < 1/497$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ و } a_1 = 1 \text{ و } q = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}} < 1/497 \Rightarrow \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} < \frac{1497}{1000}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1497}{1000} \times \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{998}{1000}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{2}{1000} \Rightarrow 3^n < \frac{1000}{2} = 500$$

به ازای $n = 5$ داریم:

$$3^5 = 243 < 500$$

اما به ازای $n = 6$ نامساوی مذکور برقرار نیست:

$$3^6 = 729 > 500 \text{ برقرار نیست}$$

بنابراین حداکثر پنج جمله را باید جمع کنیم.

۱۶- از آنجایی که $3^{-a} = \frac{1}{3^a}$ ، پس عبارت برابر است با:

$$\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

پس مجموع جملات یک دنباله هندسی با جمله اول $a = \frac{1}{3}$ و قدر نسبت زیر را می‌خواهیم:

$$q = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3^1}} = \frac{1}{3}$$

پس مجموع همه‌ی جملات برابر است با:

$$S = \frac{a}{1-q} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

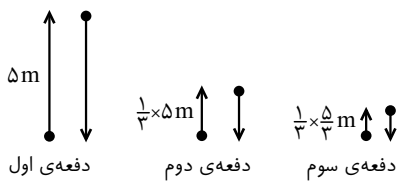
۱۷- عبارت مذکور مجموع تعداد نامتناهی جمله از دو دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \right)$$

در دنباله‌ی اول $a_1 = \frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ و در دنباله‌ی دوم $a'_1 = \frac{1}{3}$ و $q' = \frac{1}{3}$ است. با استفاده از فرمول حد مجموع داریم:

$$B = \frac{a_1}{1-q} + \frac{a'_1}{1-q'} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۸-



با توجه به شکل، دفعه‌ی اول، توپ ۱۰ متر و دفعه‌ی دوم، $2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ متر و دفعه‌ی سوم، $2 \times \frac{5}{9} = \frac{10}{9}$ متر و ... را طی کرده است. پس این مسافت‌ها تشکیل یک دنباله هندسی نامحدود با جمله‌ی اول $a_1 = 10$ و قدر نسبت $q = \frac{1}{3}$ می‌دهند.

$$10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \dots \Rightarrow a_1 = 10 \text{ و } q = \frac{1}{3}$$

در نتیجه حد مجموع این مسافت‌ها برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{3}} = \frac{10}{\frac{2}{3}} = \frac{30}{2} = 15$$

یعنی توپ از شروع پرتاب تا زمان ایستادن ۱۵ متر را طی کرده است.

$$S_n > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)}{1 - \frac{2}{3}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^n < \frac{1}{100} \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^n > 100$$

به کمک ماشین حساب داریم:

$$n = 11 \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^{11} \approx 86/5$$

$$n = 12 \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^{12} \approx 129/7$$

بنابراین بعد از ۱۲ مرحله بیش از ۹۹ درصد مربع رنگ می‌شود.

۱۴- فرض کنیم تعداد ذرات معلق موجود در محلول برابر a باشد. بعد از عبور از صافی اول تعداد آنها نصف می‌شود یعنی $\frac{a}{2}$. بعد از

عبور از صافی دوم نیز همین اتفاق می‌افتد یعنی $\frac{a}{2^2} = \frac{a}{4}$.

بنابراین بعد از عبور از صافی n ام تعداد ذرات معلق برابر $\frac{a}{2^n}$ خواهد بود. وقتی می‌گویند تعداد ذرات معلق حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد یعنی تعداد ذرات بعد از عبور از صافی n ام باید کمتر از ۴ درصد مقدار اولیه باشد. یعنی داریم:

$$\frac{a}{2^n} < \frac{4}{100} \times a \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{4}{100}$$

$$\Rightarrow 2^n > \frac{100}{4} \Rightarrow 2^n > 25$$

اولین مقدار طبیعی n که 2^n از ۲۵ بزرگتر شود، $n = 5$ است. یعنی حداقل ۵ صافی نیاز است تا ذرات معلق موجود در محلول حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد.

۱۵- می‌دانیم مجموع نامتناهی جملات یک دنباله هندسی نزولی با

$$S = \frac{a}{1-q}$$

بنابراین:

$$a = \frac{1}{3} \text{ و } q = \frac{\frac{9}{1}}{\frac{1}{27}} = \frac{1}{27}$$

پس:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{27}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{26}{27}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 4x^3 - nx^2 + m = (x^2 + x - 2)Q(x) \\
 &= (x-1)(x+2)Q(x) \\
 x=1 &\Rightarrow P(1) = 4 - n + m = 0 \\
 x=-2 &\Rightarrow P(-2) = -32 - 4n + m = 0 \\
 \Rightarrow 36 + 3n &= 0 \Rightarrow n = -12, m = -16
 \end{aligned}$$

۲۵- باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $ax + b$ برابر است

$$\text{با: } P\left(-\frac{b}{a}\right) \text{ ریشه‌ی عبارت درجه‌ی اول است.}$$

باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x : $P(0) = 2$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$: $P(-2) = 1$

حال الگوریتم تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + 2x$ را می‌نویسیم. دقت

کنید که درجه‌ی باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر است.

$$P(x) = (x^2 + 2x) \times Q(x) + mx + n$$

$$\Rightarrow P(x) = x(x+2) \times Q(x) + mx + n$$

$$\begin{cases}
 P(0) = 2 \Rightarrow 0 + n = 2 \Rightarrow n = 2 \\
 P(-2) = 1 \Rightarrow -2m + n = 1
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2m + 2 = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R(x) = mx + n = \frac{1}{2}x + 2 \text{ باقی مانده‌ی تقسیم}$$

۲۶-

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x + 2$: $f(-2) = 1$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x - 3$: $f(3) = 2$

حال الگوریتم تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 6$ را می‌نویسیم:

$$f(x) = (x^2 - x - 6) \times Q(x) + mx + n$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+2)(x-3) \times Q(x) + mx + n$$

$$\begin{cases}
 f(-2) = 1 \Rightarrow -2m + n = 1 \quad (*) \\
 f(3) = 2 \Rightarrow 3m + n = 2
 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \Delta m = 1$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow -\frac{2}{\Delta} + n = 1 \xrightarrow{(*)} n = \frac{7}{\Delta}$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{\Delta}x + \frac{7}{\Delta}$$

۲۷- یک ریشه‌ی معادله $x = 2$ است، پس در خود معادله صدق

می‌کند:

$$2^2 - 2(2)^2 + 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین:

$$\underbrace{x^3 - 2x^2 - x + 2}_{x^2(x-2) - (x-2)} = 0 \Rightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1, x = -1$$

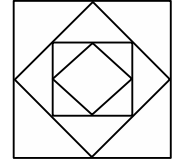
۱۹- مساحت مربع اولیه $2^2 = 4$ است. مساحت مربع بعدی

$$2 = 4 \times \frac{1}{4} \text{ است و به همین ترتیب مساحت‌ها تشکیل دنباله‌ی}$$

هندسی با جمله‌ی اول $a_1 = 4$ و $q = \frac{1}{4}$ می‌دهند:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

$$\text{حد مجموع} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = 8$$



نکته: اگر اواسط اضلاع هر چهار ضلعی محدب را به هم وصل کنیم، مساحت چهار ضلعی حاصل، نصف مساحت چهارضلعی اولیه است.

۲۰- باید $P\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$ باشد، لذا:

$$P\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - m\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4} - \frac{m}{4} - 1 + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

۲۱- باید $P(-1) = 2$ باشد، لذا:

$$P(-1) = 2(-1)^4 + m(-1) + 2 = 2 \Rightarrow m = 2$$

بنابراین $P(x) = 2x^4 + 2x + 2$ ، پس باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر $P(1)$ است:

$$P(1) = 2(1)^4 + 2(1) + 2 = 6$$

۲۲- $P(x)$ یک چند جمله‌ای درجه دوم است، بنابراین:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

ضریب بزرگترین توان آن ۱ است، پس $a = 1$ و خواهیم داشت:

$$P(x) = x^2 + bx + c$$

اما $P(1) = 1$ و $P(2) = 3$ ، لذا:

$$P(1) = 1 \Rightarrow 1 + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 & (1) \\ 2b + c = -1 & (2) \end{cases}$$

$$P(2) = 3 \Rightarrow 4 + 2b + c = 3 \Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 & (1) \\ 2b + c = -1 & (2) \end{cases}$$

از حل دستگاه $b = -1$ و $c = 1$ و از آنجا:

$$P(x) = x^2 - x + 1$$

۲۳- چون باقی مانده‌ی دو چندجمله‌ای بر $x - 1$ برابر است، پس مقدار

آنها به ازای $x = 1$ مساوی است، لذا:

$$2x^2 - 5x + 4 \Big|_{x=1} = 1 \quad (1)$$

$$x^2 + ax \Big|_{x=1} = 1 + a \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)=(2)} 1 + a = 1 \Rightarrow a = 0$$

۲۴- اگر چندجمله‌ای $P(x) = 4x^3 - nx^2 + m$ بر $x^2 + x - 2$

بخش پذیر باشد، آن گاه:

$$\begin{aligned}
 &+ 1 \cdot (1)^2 \left(-\frac{2}{x}\right)^3 + 5(1)^1 \left(-\frac{2}{x}\right)^4 + \left(-\frac{2}{x}\right)^5 \\
 \Rightarrow &\left(1 - \frac{2}{x}\right)^5 = 1 - 5\left(\frac{2}{x}\right) + 10\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 10\left(\frac{2}{x}\right)^3 \\
 &+ 5\left(\frac{2}{x}\right)^4 - \left(\frac{2}{x}\right)^5
 \end{aligned}$$

۳۲- جمله‌ی k ام بسط $(a+b)^n$ برابر است با:

$$\text{جمله‌ی } k \text{ ام} = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} \times b^{k-1}$$

پس جمله‌ی سوم برابر است با:

$$\text{جمله‌ی سوم} = \binom{5}{2} x^{5-2} \times \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

$$\text{جمله‌ی سوم} = \frac{5!}{2!3!} x^3 \times \frac{4}{x^2} = 40x$$

۳۳- با استفاده از فرمول جمله‌ی k ام در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ داریم:

$$\text{جمله‌ی } k \text{ ام} = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} \times b^{k-1}$$

بنابراین در بسط $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{10}$ داریم:

$$\text{جمله‌ی نهم} = \binom{10}{8} (\sqrt{x})^{10-8} \times \left(\frac{1}{x}\right)^8$$

$$= \frac{10!}{8!2!} \times x \times \frac{1}{x^8} = \frac{45}{x^7}$$

۳۴- کافی است جمله‌ی k ام را نوشته و پس از ساده کردن، توان x در آن را برابر صفر قرار دهیم تا مستقل از x شود.

$$\text{در بسط} \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} \text{ داریم:}$$

$$\text{جمله‌ی } k \text{ ام} = \binom{10}{k-1} (x^2)^{10-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1}$$

$$= \binom{10}{k-1} x^{22-2k} \times x^{-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}} = \binom{10}{k-1} x^{\frac{45}{2} - \frac{5}{2}k}$$

$$\frac{45}{2} - \frac{5}{2}k = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}k = \frac{45}{2} \Rightarrow k = 9$$

یعنی جمله‌ی نهم مستقل از x است.

$$k = 9 \Rightarrow \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = 45$$

۳۵- می‌دانیم که $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$ بنابراین کافی است جمله‌ی k ام را برای بسط مورد نظر نوشته و پس از ساده کردن، توان x در آن

۲۸- $(x-1)$ یک فاکتور $x^3 + (k+1)x^2 - 5x - 2k$ است. پس $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر و $P(1)$ برابر صفر است.

$$P(1) = 0 \Rightarrow 1 + k + 1 - 5 - 2k = 0 \Rightarrow k = -3$$

$$\Rightarrow P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

چون $(x-1)$ یک فاکتور عبارت $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ است، بنابراین باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر صفر است:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad | \quad x-1 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -x^2 - 5x + 6 \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{-6x + 6} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 &= (x-1)(x^2 - x - 6) \\
 &= (x-1)(x-3)(x+2)
 \end{aligned}$$

۲۹- چندجمله‌ای درجه سوم را به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ در نظر می‌گیریم. باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ و $x-1$ برابر 4 و یکی از عامل‌های $f(x)$ ، x است، یعنی داریم:

$$f(-1) = 4 \quad f(1) = 4 \quad f(-2) = 4 \quad f(0) = 0$$

در نتیجه داریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$f(-1) = 4 \Rightarrow -a + b - c = 4 \quad (1)$$

$$f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4 \quad (2)$$

$$f(-2) = 4 \Rightarrow -8a + 4b - 2c = 4 \quad (3)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

از تفریق روابط (۱) و (۲) داریم:

$$2a + 2c = 0 \Rightarrow a = -c$$

حال در رابطه‌ی (۳)، $b = 4$ و $a = -c$ را قرار می‌دهیم:

$$-8(-c) + 16 - 2c = 4 \Rightarrow 6c = -12 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین چندجمله‌ای درجه سوم به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$$

۳۰-

$$(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

۳۱- مطابق فرمول بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\left(1 - \frac{2}{x}\right)^5 = 1^5 + 5(1)^4 \left(-\frac{2}{x}\right)^1 + 10(1)^3 \left(-\frac{2}{x}\right)^2$$

۳۸- حداقل زمانی که سه زنگ با هم بزنند، کوچکترین مضرب مشترک زمان زنگ زدن این سه زنگ است، لذا:

$$۱۸ = ۳^۲ \times ۲ \quad \text{و} \quad ۲۴ = ۲^۳ \times ۳ \quad \text{و} \quad ۳۲ = ۲^۵$$

بنابراین:

$$\text{دقیقه} \quad \text{م.م.ک} = ۳^۵ \times ۳^۲ = ۳^۷ \times ۹ = ۲۸۸$$

بنابراین ۲۸۸ دقیقه طول می‌کشد که سه زنگ با هم بزنند.

۳۹- کافی است م.م.ک اعداد ۵۴، ۷۰ و ۱۸۰ را بدست آوریم.

$$۵۴ = ۳^۳ \times ۲$$

$$۷۰ = ۲ \times ۵ \times ۷$$

$$۱۸۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵$$

$$\Rightarrow [۵۴, ۷۰, ۱۸۰] = ۲^۲ \times ۳^۳ \times ۵ \times ۷ = ۳۷۸۰$$

بنابراین وقتی از نقطه‌ی A در یک جهت شروع به حرکت می‌کنند

حداقل بعد از ۳۷۸۰ دقیقه هر سه با هم دوباره به نقطه‌ی A می‌رسند.

۴۰- الف) کافی است صورت و مخرج کسر را در $(x-1)(x+1)$

ضرب کنیم. داریم:

$$A = \frac{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x^{10} - 1}$$

$$= \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x+1)(x-1)(x^{10} - 1)}$$

با استفاده از روابط زیر داریم:

$$x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} \dots + 1) \quad (n \text{ فرد و طبیعی})$$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) \quad (n \text{ طبیعی})$$

$$\Rightarrow A = \frac{(x^5 + 1)(x^5 - 1)}{(x^2 - 1)(x^{10} - 1)} = \frac{x^{10} - 1}{(x^2 - 1)(x^{10} - 1)} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

ب) با استفاده از تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک و

فاکتورگیری داریم:

$$B = \frac{a^3 + a - 2}{a^3 + 2a^2} \div \frac{a^2 - 5a + 4}{a^2 - 4a}$$

$$= \frac{(a+2)(a-1)}{a^2(a+2)} \times \frac{a(a-4)}{(a-1)(a-4)} = \frac{1}{a}$$

۴۱-

$$A = \frac{((x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1))(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow A = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

۴۲- اگر طول مستطیل را با a و عرض آن را با b نمایش دهیم آنگاه:

$$۲(a+b) = ۱۸ \Rightarrow S = a+b = ۹$$

$$\text{مساحت} \quad ab = ۱۴ \Rightarrow P = ab = ۱۴$$

را برابر $\frac{4}{3}$ قرار دهیم. در بسط $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$ می‌دانیم

که $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ و $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ ، بنابراین داریم:

$$\text{جمله‌ی } k\text{ام} = \binom{9}{k-1} \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{10-k} \times \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{k-1}$$

$$= \binom{9}{k-1} \times \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{k-1} \times x^{\frac{20-2k}{3}} \times x^{\frac{-k+1}{3}}$$

$$= \binom{9}{k-1} \times \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{k-1} \times x^{\frac{40-4k-3k+2}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{43 - 7k}{6} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow 43 - 7k = 8$$

$$\Rightarrow 7k = 35 \Rightarrow k = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^4} \text{ ضریب جمله‌ی شامل} = \binom{9}{4} \times \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4 = \frac{126}{16} = \frac{63}{8}$$

۳۶- برای یافتن مجموع ضرایب در یک بسط کافی است به جای

متغیرهای داخل پرانتز در بسط، عدد یک قرار دهیم:

$$(3x^2 + y^4)^n \xrightarrow{x=1, y=1} \text{مجموع ضرایب} = 4^n$$

$$(3\sqrt{x} - 5\sqrt{y})^n \xrightarrow{x=1, y=1} \text{مجموع ضرایب} = 2^n$$

$$\Rightarrow 4^n = 2^n + 240 \quad \text{و} \quad 2^n = A$$

$$\Rightarrow A^2 = A + 240 \Rightarrow A^2 - A - 240 = 0$$

$$\Delta = 1 + 960 = 961 \Rightarrow A = \frac{1 \pm 31}{2} = \begin{cases} 16 \\ -15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^n = 16 \Rightarrow n = 4 \\ 2^n = -15 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

۳۷- ابتدا ب.م.م. اعداد را می‌یابیم:

$$\left. \begin{aligned} 144 &= 3^2 \times 2^4 \\ 45 &= 3^2 \times 5 \\ 63 &= 3^2 \times 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ب.م.م} = 3^2$$

بنابراین کافی است در هر مورد از شیشه‌های ۹ لیتری استفاده کنیم.

$$\text{تعداد شیشه‌های آب میوه} = \frac{144}{9} = 16$$

$$\text{تعداد شیشه‌های شیر} = \frac{45}{9} = 5$$

$$\text{تعداد شیشه‌های دوغ} = \frac{63}{9} = 7$$

در نتیجه حداقل تعداد شیشه‌های مورد نظر برابر است با:

$$16 + 5 + 7 = 28$$

پاسخ کوتاه فصل اول

۲۷- $a = -11$ و جواب‌های دیگر: $\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{2}$

۲۸- فاکتورهای دیگر: $x-1$ و $x+2$

۲۹- $(x-1)(x+1)\left(\frac{2}{3}x+1\right)$

۳۰-

$(3x)^5 + 5(3x)^4(2y) + 10(3x)^3(2y)^2 + 10(3x)^2(2y)^3 + 5(3x)(2y)^4 + (2y)^5$

۳۱-

$\left(\frac{1}{x}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{x}\right)^3 \times 2 + 6\left(\frac{1}{x}\right)^2 \times 2^2 + 4\left(\frac{1}{x}\right) \times 2^3 + 2^4$

۳۲- $80x$

۳۳- جمله‌ی چهارم = $\frac{-160}{x^2}$

۳۴- جمله‌ی فاقد x = 180

۳۵- 1792

۳۶- $n = 3$

۳۷- 32 میوه در هر جعبه و 13 جعبه

۳۸- با احتساب روز اول، 6 مرتبه

۳۹- 842 مهره

۴۰- الف) $x-1$ ب) $\frac{x-3}{x+3}$

۴۱- $\frac{1}{t^5-1}$

۴۲- طول 7 و عرض 4 سانتی‌متر

۴۳- $x^2 - 4x + 1 = 0$

۴۴- $m = 12$ و $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$

۴۵- 52

۴۶- 4

۴۷- $m = -10$

۴۸- $m = -1$

۴۹- $m = 16$

۵۰- $x^2 + x - 12 = 0$

۵۱- $2x^2 + 3x + 1 = 0$

۱- $S_{20} = 280$

۲- جمله 11

۳- 670

۴- از مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی استفاده کنید.

۵- $n = 5$

۶- 1890

۷- $n = 115$

۸- 7 ماه

۹- پنج جمله

۱۰- شش جمله

۱۱- -341

۱۲- $q = \pm 2$

۱۳- 7 مرحله

۱۴- 6 لایه

۱۵- $S = \frac{1}{3}$

۱۶- $S = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

۱۷- $\frac{11}{26}$

۱۸- $\frac{252}{5}$ متر

۱۹- $2P + \frac{4S}{3}$

۲۰- $m = -10$

۲۱- $b = \frac{1}{2}$ و $a = -3$

۲۲- $p(x) = x^2 - 4x + 5$

۲۳- $a = 30$

۲۴- $m = \frac{-5}{4}$ و $n = \frac{1}{2}$

۲۵- $R(x) = x + 5$

۲۶- $R(x) = -x + 2$

استان تهران	
مدرسه	شهر
غیر انتفاعی معلم، تقوی‌نیا، مفتاح، کیمیای سعادت، دهخدا، غیر انتفاعی ره توشه، غیر انتفاعی روشنگران، حکمت، شاهد شهید مدرس، آبسال، غیر انتفاعی فرهیختگان، علامه طباطبایی، دکتر مصاحب، دخترانه‌ی نصر، غیر انتفاعی صراط، نمونه دولتی طالقانی، دکتر حسابی، فیروز بهرام، صالحی شفا، شاهد شهید کلهر، شهدای هفت تیر، محبوبه‌ی دانش، روزبه، غیر انتفاعی پیشرو	تهران
نمونه دولتی ابوتراب	قدس
دکتر باهنر	دماوند
سراوان	شهریار
استان چهار محال و بختیاری	
مدرسه	شهر
قلم‌چی	شهرکرد
دکتر حسن سلطانی	فارسان
غیر دولتی مهرگان	بروجن
استان خراسان رضوی	
مدرسه	شهر
حضرت زینب، فرزاتگان، امام رضا، نیلوفر، غیر انتفاعی یاس نبی، غیر انتفاعی فرهیختگان، پروین	مشهد
موسسه فرهنگی آموزشی امام حسین	سبزوار
مهد علم	تربت حیدریه
استان خراسان جنوبی	
مدرسه	شهر
شهید طوبی تاجریزی، سید الشهداء	بیرجند
استان خراسان شمالی	
مدرسه	شهر
نمونه دولتی رضوان	آشخانه
استان خوزستان	
مدرسه	شهر
نوید صالحین	اهواز
غیر دولتی پتروشیمی	ماهشهر

استان آذربایجان شرقی	
مدرس	شهر
نمونه دولتی باقرالعلوم، نمونه دولتی طالقانی، نمونه دولتی شهریار	تبریز
تیزهوشان طباطبایی، نمونه‌ی ولی عصر	بناب
نمونه دولتی تلاش	جلفا
سروش سرمد، نمونه دولتی حکمت	میانه
غیر انتفاعی اروند، غیر انتفاعی خیام	عجب شیر
علامه امینی، غیر دولتی مهر	مرند
استان آذربایجان غربی	
مدرسه	شهر
آموزشگاه شاهد	آزاد شهر
استان اصفهان	
مدرسه	شهر
نمونه سلامتیان، غیر دولتی حضرت ابوالفضل، غیر انتفاعی پرتو نور، آفتاب	اصفهان
شاهد کوثر، غیر دولتی نخبگان، حضرت زهرا، امیرکبیر	نجف‌آباد
مهدیه، غیر انتفاعی معرفت، غیر انتفاعی افق	شهرضا
نمونه آزادگان	گلپایگان
سمیه	نطنز
مشاهیر	شاهین شهر
دخترانه‌ی قدسیه	زرین شهر
استان البرز	
مدرسه	شهر
شاهد شهید پناهی، غیر انتفاعی جامی، قلم‌چی، غیر انتفاعی رشد نو، پژوهندگان، غیر دولتی بهارستان، استعدادهای درخشان شهید سلطانی، دکتر معین، شاهد عصمت، نرجس، دکتر حسابی، شهید شرافت	کرج
قلم‌چی، نمونه دولتی شمس تبریزی	نظرآباد
حضرت زهرا	ماه‌دشت
استان بوشهر	
مدرسه	شهر
حدیث	بوشهر

استان گیلان	
شهر	مدرسه
رامسر	شهید رجایی
استان لرستان	
شهر	مدرسه
خرم آباد	غیر انتفاعی بعثت، دخترانه‌ی شاهد
الیگودرز	دخترانه شاهد
پل دختر	نمونه دانش
استان مازندران	
شهر	مدرسه
ساری	ناحیه‌ی ۲
قائم شهر	فرزانگان
استان مرکزی	
شهر	مدرسه
اراک	نمونه کوثر
استان هرمزگان	
شهر	مدرسه
بندر عباس	۲۱ بهمن
میناب	نمونه خاتم الانبیاء
استان همدان	
شهر	مدرسه
همدان	هیئت امنایی مهدیه، دارالفنون، تربیت، شهید مدنی، نور دانش ۲، دارالفنون، پروین اعتصامی، تربیت
ملایر	شاهد فرهیختگان
استان یزد	
شهر	مدرسه
یزد	نمونه ملک ثابت، شاهد جعفری نعیمی، شاهد رمضانزاده

استان زنجان	
شهر	مدرسه
زنجان	شاهد فاطمیه
ابهر	الزهرا
استان سمنان	
شهر	مدرسه
سمنان	غیر انتفاعی ایران، شهید بهشتی
گرمسار	نمونه محدثه
استان سیستان و بلوچستان	
شهر	مدرسه
زاهدان	نمونه نرجس، شاهد، فضیلت، نمونه پژوهش
استان فارس	
شهر	مدرسه
شیراز	علامه اقبال لاهوری ۲، یاس، دکتر حسابی ۱
اقلید	الزهراء، وزیری، شاهد
استان قزوین	
شهر	مدرسه
تاکستان	نمونه دولتی فارابی
استان کردستان	
شهر	مدرسه
سنندج	نمونه‌ی ناحیه‌ی ۱، سلیمان خاطر، شیخ شلتوت، فرزنانگان
قروه	نبی اکرم
استان کرمان	
شهر	مدرسه
کرمان	نمونه محدثه
بردسیر	نمونه دولتی حضرت فاطمه
استان کرمانشاه	
شهر	مدرسه
کرمانشاه	نمونه دولتی بعثت
استان گلستان	
شهر	مدرسه
گرگان	شاهد دختران، پویش
گنبد کاووس	فرزانگان، آموزشگاه نمونه‌ی بقیه ا...، شهید بهشتی