۲. احتمال — تعریف‌های مهم و محاسبه‌ی احتمال با استفاده از تعریف

پدیده (آزمایش) تصادفی: پدیده‌ای (آزمایشی) که از همه‌ی حالت‌های ممکن در بوقوع پیوستن آن مطلع باشیم، اما از این که کدام حالت قطعا رخ خواهد داد، اطمینان نداشته باشیم.

مانند پرتاب تاس، پرتاب سکه، جنسیت نوزاد قبل از تولد و ... .

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن در بوقوع پیوستن یک پدیده‌ی تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده‌ی تصادفی نامیده و معمولاً آن را با S نشان می‌دهیم.

مثلاً فضای نمونه‌ای در پرتاب یک تاس $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است و یا فضای نمونه‌ای فرزندان یک خانواده‌ی ۳ فرزندی به‌صورت $S=\{$ ددد، پدد، دپد، ددپ، دپپ، پدپ، پپد، پپپ $\}$ است.

پیشامد تصادفی: اگر یک پدیده‌ی تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه‌ای آن باشد، آنگاه هر زیرمجموعه‌ی S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

مثلاً اگر پیشامد تصادفی A، به‌صورت بیشتر بودن تعداد فرزندان دختر در یک خانواده‌ی ۳ فرزندی تعریف شود، آنگاه $A=\{$ ددد، پدد، دپد، ددپ $\}$.

وقوع پیشامد تصادفی: وقتی می‌گوییم پیشامدی به وقوع پیوسته (رخ داده) است، یعنی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش مشاهده شده است.

احتمال پیشامد تصادفی: احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم که برای محاسبه‌ی آن، تعداد اعضای مجموعه‌ی A (یعنی $n(A)$ که تعداد حالت‌های مطلوب است) را بر تعداد اعضای مجموعه‌ی S (یعنی $n(S)$ که تعداد حالت‌های ممکن است) تقسیم می‌کنیم (یعنی $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$). از آنجا که A زیرمجموعه‌ی S است، پس $۰\le n(A)\le n(S)$، بنابراین $۰\le P(A)\le ۱$؛ بیشتر بودن $P(A)$، بیشتر بودن شانس وقوع پیشامد A را نشان می‌دهد و بالعکس.

مثلاً با توجه به مثال قبل، احتمال آنکه در یک خانواده‌ی ۳ فرزندی، تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

توجه:

$$\begin{cases} P(A)=۰ \Leftrightarrow A=\phi & \text{(پیشامد غیر ممکن)} \\ P(A)=۱ \Leftrightarrow A=S & \text{(پیشامد قطعی)} \end{cases}$$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۷

۲۹- اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار گرفتن ارقام متمایز ۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ به‌وجود آید، احتمال آن که این عدد زوج باشد، کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۵)**

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳۰- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟ **(سراسری تجربی - ۹۲)**

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

تیپ ۸

۳۱- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟ **(سراسری تجربی - ۹۲)**

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

تیپ ۹

۳۲- ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود، سوخته است. اگر ۳ لامپ به تصادف از بین آن‌ها اختیار کنیم، احتمال این‌که هر سه لامپ سالم باشند، کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۱)**

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۳- احتمال آن‌که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)**

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۴}{۳۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۵}{۳۳}$

۳۴- در یک کیسه ۵ مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی سیاه موجود است. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که دو مهره، هم‌رنگ نباشند، کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۴)**

۱) $\frac{۶}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱۹}{۳۳}$ ۳) $\frac{۳۵}{۶۶}$ ۴) $\frac{۳۷}{۶۶}$

۳۵- از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می‌شوند. با کدام احتمال دو نفر از معرفی شدگان، از گروه ریاضی هستند؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۷)**

۱) $\frac{۲۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

۳۶- در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟ **(سراسری تجربی – ۸۶)**

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۷- از هر چهار گروه آزمایشی به‌ترتیب ۳، ۳، ۲ و ۱ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنان معرفی شوند، با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده‌اند؟ **(سراسری ریاضی – ۸۸)**

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

۳۸- در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره عددی فرد است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۷)**

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۳۹- اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته‌اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟ **(سراسری ریاضی – ۸۸)**

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۴۰- در ظرفی شش مهره با شماره‌های ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ ریخته شده‌اند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال، شماره‌های این دو مهره اعداد متوالی‌اند؟ **(سراسری ریاضی – ۸۵)**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۱- شش گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند، به تصادف دو گوی از آن‌ها برمی‌داریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو گوی کم‌تر از ۶ است؟ **(سراسری ریاضی – ۸۶)**

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۴۲- اعداد ۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ بر روی ۶ مهره‌ی یکسان نوشته شده‌اند. اگر دو مهره با هم بیرون بیاوریم، با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ می‌باشد؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۸)**

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۴۳- یکی از اعداد طبیعی ۳ رقمی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که رقم‌های یکان و صدگان این عدد با هم برابر باشند، کدام است؟ **(آزمون کانون تجربی – ۹۰)**

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۹}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

۴۴- ۳ اتومبیل سیاه و ۳ اتومبیل سفید، در یک ردیف، به تصادف کنار هم پارک شده‌اند. احتمال آنکه اتومبیل‌های سیاه و اتومبیل‌های سفید یک در میان قرار گرفته باشند، کدام است؟ **(آزمون کانون تجربی – ۹۱)**

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۴۵- از جعبه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سبز، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه فقط ۲ تا از این مهره‌ها آبی باشند کدام است؟ **(ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹- مثال ۳- ج)**

۱) $\frac{۱۴}{۵۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۱۶۵}$

۴۶- کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. در این اداره، احتمال آنکه «کارمندی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد» چند برابر احتمال آن است که «کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد»؟ **(ریاضی عمومی- صفحه‌ی ۹)**

		جنسیت: مرد	جنسیت: زن
تحصیلات	دانشگاهی	۱۵	۱۰
تحصیلات	کمتر از دانشگاهی	۹۰	۸۰

۱) $\frac{۳}{۵}$

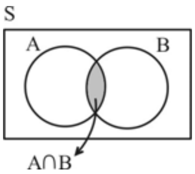
۲) $\frac{۳۵}{۳۹}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۵}{۶}$

۲. احتمال

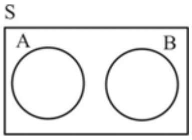
- ترکیب پیشامدها
- پیشامدهای ناسازگار و قانون جمع احتمالات
- خواص پیشامد متمم



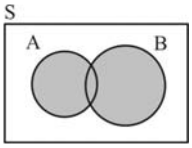
۱- اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه اشتراک آنها را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A\cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهد.»

توجه: اگر پیشامد A زیرمجموعه‌ی پیشامد B باشد، آنگاه داریم $A\cap B=A$ و بالعکس، یعنی از $A\cap B=A$ می‌توان نتیجه گرفت که $A\subseteq B$.

توجه: در مسائل احتمال، اشتراک $(\cap)$ متناظر با عبارت «و» است.



پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری که $A\cap B=\phi$، آنگاه دو پیشامد A و B ناسازگار نامیده می‌شوند، یعنی این دو پیشامد نمی‌توانند بطور همزمان اتفاق بیفتند.



۲- اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه اجتماع آنها را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A\cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دوی آنها رخ دهد.»

با توجه به اینکه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$، از تقسیم طرفین این تساوی بر $n(S)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

توجه: در مسائل احتمال، اجتماع $(\cup)$ متناظر با عبارت «یا» است.

اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آنگاه $A\cap B=\phi$ و در نتیجه $P(A\cap B)=0$، پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

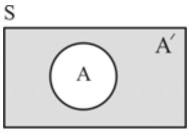
قانون جمع احتمالات برای پیشامدهای ناسازگار: تعمیم رابطه‌ی بالا به این صورت است: اگر A، B، C و ... پیشامدهایی دو به دو ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه:

$$P(A\cup B\cup C\cup ...)=P(A)+P(B)+P(C)+...$$

■ مثال: کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است. ۲ مهره به تصادف و به طور همزمان خارج می‌کنیم. احتمال همرنگ بودن این دو مهره چقدر است؟

◄ حل: اگر A را پیشامد سفید بودن هر دو مهره‌ی خارج شده و B را پیشامد سیاه بودن هر دو مهره‌ی خارج شده در نظر بگیریم، آنگاه A و B ناسازگارند و $P(A\cup B)$ مورد نظر مسأله است، پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۳+۴}{۲}}+\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۳+۴}{۲}}=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۳+۶}{۲۱}=\frac{۳}{۷}$$

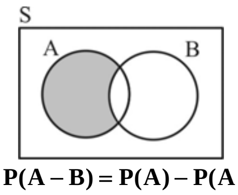


۳- متمم یک پیشامد: اگر A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه متمم آن را A' نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.»

خواص پیشامد متمم:

$$\begin{cases}۱)\ A\cap A'=\phi\\ ۲)\ A\cup A'=S\\ ۳)\ P(A)+P(A')=۱\Rightarrow P(A)=۱-P(A')\ \text{ یا }\ P(A')=۱-P(A)\end{cases}$$

در بعضی مسائل، محاسبه‌ی $P(A')$ ساده‌تر از محاسبه‌ی $P(A)$ است، برای حل این مسائل از خاصیت ۳ در بالا استفاده می‌کنیم.



۴- تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه تفاضل B از A را با نماد $A-B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.»

با توجه به اینکه $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$، از تقسیم طرفین تساوی اخیر بر $n(S)$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱۰

۴۷- در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال اینکه حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)**

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۸- احتمال آن‌که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود، ۵۵٪ و در درس شیمی قبول شود، ۶۰٪ است. اگر احتمال آن‌که حداقل در یکی از دروس قبول شود، ۷۵٪ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟ **(سراسری ریاضی - ۸۱)**

۱) ۳۵٪ ۲) ۴۰٪ ۳) ۴۵٪ ۴) ۵۰٪

تیپ ۱۱

۴۹- در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده همرنگ‌اند؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)**

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

تیپ ۱۲

۵۰- تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنان تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجرین برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۷)**

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵۱- از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۶)**

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۲۶ ۴) ۰/۲۸

۵۲- برای انجام مسابقه‌ای، ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه، متفاوت‌اند؟ **(سراسری ریاضی - ۸۵)**

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۵۳- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آنها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)**

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$

۵۴- در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره‌ی آبی خارج می‌شود؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)**

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۵۵- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. احتمال آنکه فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد، کدام است؟ **(ریاضی عمومی- صفحه‌ی ۴ و ۵)**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۵۶- ۳ سکه را همزمان پرتاب می‌کنیم؛ اگر دو پیشامد A و B را به‌صورت زیر تعریف کنیم: **(آزمون کانون تجربی- ۹۰)**

A: حداقل یکی از سکه‌ها به پشت بنشیند.
B: تعداد سکه‌هایی که به رو نشسته‌اند بیش‌تر از سکه‌هایی باشد که به پشت نشسته‌اند.

آنگاه احتمال پیشامد $A \cap B$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۵۷- تمام اعداد دو رقمی را که می‌توان با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ ساخت روی کارت‌های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یکی از کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه عدد خارج شده مضرب ۴ یا کوچکتر از ۴۰ باشد کدام است؟ **(ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۲- تمرین ۵)**

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۵۸- از سه دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی و دو دانش‌آموز رشته‌ی تجربی، دو نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد هر دو هم رشته باشند؟ **(آزاد غیر پزشکی - ۸۸)**

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۵۹- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: **(ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۱- تمرین ۳- هـ)**

A: فرزندهای سوم و چهارم دختر باشند.
C: تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.

احتمال پیشامد $A - C$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۶۰- A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S هستند. پیشامد «فقط A رخ می‌دهد یا فقط B رخ می‌دهد» در کدام گزینه بیان شده است؟ **(ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۱- تمرین ۴)**

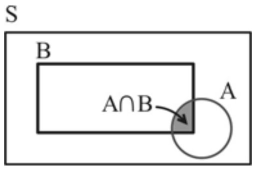
۱) $A \cup B$ ۲) $S-(A \cap B)$ ۳) $A' \cap B'$ ۴) $(A-B)\cup(B-A)$

۶۱- در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که مجموع دو تاس عددی کوچکتر از ۱۱ باشد، چقدراست؟ **(آزاد پزشکی عصر - ۸۹)**

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۲. احتمال

- احتمال شرطی
- قانون احتمال کل و نمودار درختی
- پیشامدهای مستقل و قانون ضرب احتمالات



تعریف احتمال شرطی: اگر A پیشامدی دلخواه و B پیشامدی ناتهی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه اگر بدانیم B رخ داده است، احتمال A را با نماد $P(A|B)$ نشان داده و احتمال شرطی وقوع A به شرط وقوع B می‌نامیم. با توجه به شکل مقابل می‌توان گفت که اگر بدانیم B رخ داده است، در واقع فضای نمونه‌ای S به B و پیشامد A به $A\cap B$ تبدیل شده و هر دو کوچک می‌شوند.

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

■ **مثال:** در پرتاب دو تاس می‌دانیم که هر دو عدد رو شده فرد هستند، احتمال آنکه مجموع آنها بیش از ۷ باشد چقدر است؟

◄ **حل:** در نظر می‌گیریم:
A: مجموع دو تاس بیش از ۷ باشد.
B: هر دو تاس فرد باشد.

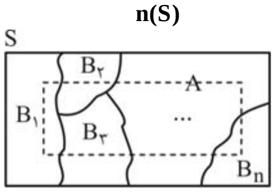
طبق اصل ضرب برای آنکه هر دو تاس فرد باشند، برای هر کدام ۳ حالت (۵،۳،۱) وجود دارد، پس $n(B)=۳\times۳=۹$.

و همچنین: $A\cap B=\{(۳,۵),(۵,۳),(۵,۵)\}$، پس $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$.

یعنی در واقع از بین ۹ حالت $B=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),\underline{(۳,۵)},(۵,۱),\underline{(۵,۳)},\underline{(۵,۵)}\}$، ۳ حالتی که زیر آنها خط کشیده شده است مطلوب هستند که احتمال آن $\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۹}$ است.

نتیجه‌ی مهم تعریف احتمال شرطی: در تساوی $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$، اگر صورت و مخرج کسر را بر $n(S)$ تقسیم کنیم به رابطه‌ی مهم زیر می‌رسیم:

$$P(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow\begin{cases}P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\ P(A\cap B)=P(B).P(A|B)\end{cases}$$



قانون احتمال کل: فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند که حتماً یکی از آنها رخ می‌دهد (به عبارت دیگر یعنی $B_1\cup B_2\cup...\cup B_n=S$) و همچنین فقط یکی از این پیشامدها بتواند رخ دهد (یعنی B_1، B_2 و ... B_n دو به دو ناسازگار باشند) آنگاه برای هر پیشامد دلخواه مانند A در این فضای نمونه‌ای، با توجه به شکل بالا، داریم:

$$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup...\cup(A\cap B_n)\Rightarrow P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+...+P(A\cap B_n)$$
$$\Rightarrow P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+...+P(B_n).P(A|B_n)$$

توجه کنید که معمولاً مسائل مربوط به قانون احتمال کل را با استفاده از نمودار درختی حل می‌کنیم.

■ **مثال:** کیسه‌ی (۱) شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و کیسه‌ی (۲) شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. کیسه‌ای را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف از آن خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن این مهره چقدر است؟

◄ **حل:** روش اول: A: پیشامد سفید بودن مهره، B_1: پیشامد انتخاب کیسه‌ی (۱)، B_2: پیشامد انتخاب کیسه‌ی (۲)

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۱}{۲}$$

پیشامدهای مستقل: فرض کنید A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با این خاصیت که وقوع B در کاهش یا افزایش احتمال وقوع A بی‌تأثیر باشد، یعنی $P(A)=P(A|B)$ در این صورت دو پیشامد A و B مستقل نامیده می‌شوند. در چنین حالتی رابطه‌ی احتمال شرطی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\xrightarrow[P(A|B)=P(A)]{\text{مستقلاند } B \text{ و } A}P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

عکس این موضوع هم صحیح است، یعنی
- اگر $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$، آنگاه A و B مستقل هستند.
- اگر $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$، آنگاه A و B وابسته هستند.

قانون ضرب احتمال‌های پیشامدهای مستقل: اگر A، B، C و ... پیشامدهایی دوبه‌دو مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه:

$$P(A\cap B\cap C\cap...)=P(A)\times P(B)\times P(C)\times...$$

☑ **نکته:** اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آنگاه:

۱- A' و B مستقل از همند. ۲- A و B' مستقل از همند. ۳- A' و B' مستقل از همند.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱۳

۶۲- در یک خانواده‌ی دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۶۳- یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷) ۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۶۴- در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است، با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ **(سراسری تجربی - ۸۷)**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۶۵- یک تاس همگن را انداخته‌ایم. برآمد مضرب ۳ نیست، احتمال آن‌که شماره‌ی ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۶)**

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

تیپ ۱۴

۶۶- در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگه‌داری می‌شوند. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال، فقط یکی از موش‌های فراری، دیابتی است؟ **(سراسری تجربی - ۸۱)**

۱) $\frac{۱۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۶۷- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ **(سراسری تجربی - ۸۸)**

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

تیپ ۱۵

۶۸- ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸)**

۱) ۶۱/۴ ۲) ۶۱/۸ ۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

۶۹- در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه سلامت دارد؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)**

۱) ۰/۶۵۸ ۲) ۰/۶۶۹ ۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۶۹۶

۷۰- احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، ۱۰ درصد و به فرزند دختر، ۶ درصد است. با کدام احتمال، فرزندی که به دنیا می‌آید، این نوع بیماری را ندارد؟ **(سراسری تجربی - ۸۳)**

۱) ۰/۹۱ ۲) ۰/۹۲ ۳) ۰/۹۳ ۴) ۰/۹۴

۷۱- احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟ **(سراسری تجربی - ۸۹)**

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

۷۲- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ **(سراسری تجربی - ۹۱)**

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۷۳- در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)**

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

۷۴- ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟ **(سراسری تجربی - ۹۳)**

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

تیپ ۱۶

۷۵- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن‌که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۲)

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۷۶- احتمال این‌که روز تولد دو نفر در یک روز از ایام هفته نباشد، کدام است؟ (سراسری انسانی - ۸۴)

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

تیپ ۱۷

۷۷- در پرتاب دو تاس، با کدام احتمال اعداد ۵ یا ۶ هر دو ظاهر می‌شوند؟ (سراسری انسانی - ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۷۸- چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر از آنها یکسان است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

تیپ ۱۸

۷۹- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال، حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$ (سراسری تجربی - ۹۱)

تیپ ۱۹

۸۰- در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند؛ اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (سراسری تجربی - ۹۰)

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۸۱- در پرتاب دو تاس، اگر هر دو عدد ظاهر شده کم‌تر از ۴ باشند، آنگاه احتمال آن‌که قدر مطلق تفاضل این دو عدد برابر با یک نباشد، کدام است؟ (آزمون کانون تجربی - ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۸۲- اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری‌که $P(A|B') = ۰/۴$ و $P(B) = ۰/۳$، آنگاه احتمال وقوع پیشامد $A \cup B$ کدام است؟ (آزمون کانون تجربی - ۹۱)

۱) ۰/۵۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴۶ ۴) ۰/۵۸

۸۳- دو تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال آنکه اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۹- تمرین ۹-ب)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۸۴- تاسی را سه بار می‌اندازیم. احتمال آنکه «هر ۳ عدد رو شده متمایز باشند»، چند برابر احتمال آن است که «هر ۳ عدد رو شده مثل هم باشند»؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۷- مثال ۷-الف و ب)

۱) ۳۵ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۸۵- چقدر احتمال دارد در یک تیم ۶ نفره، هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۵- مثال ۴)

۱) $\frac{\binom{۱۲}{۶}}{۱۲^۶}$ ۲) $\frac{۶!}{۱۲^۶}$ ۳) $\frac{P(۱۲,۶)}{۱۲^۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲^۶}$

۸۶- آزمایش‌ها نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A بعد از یک عمل جراحی ۸۰ درصد و همین احتمال برای شخص B، ۶۰ درصد است. احتمال آنکه حداقل یکی از این دو نفر بعد از این عمل جراحی بهبود یابد، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مثال ۲)

۱) ٪۹۱ ۲) ٪۹۲ ۳) ٪۹۰ ۴) ٪۸۹

۸۷- احتمال آنکه شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۶ و همین احتمال برای شخص B، برابر ۰/۷ است. احتمال آنکه حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۹- تمرین ۷-ب)

۱) ۰/۵۸ ۲) ۰/۷۷ ۳) ۰/۶۶ ۴) ۰/۴۲

۸۸- اگر بدانیم که ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده‌ی عامل RH خون منفی هستند، آنگاه احتمال آنکه RH خون فردی منفی نباشد، چند برابر احتمال آن است که RH خون او منفی باشد؟ (ریاضی عمومی- صفحه‌ی ۷- مثال ۱۱ و مسئله‌ی ۱)

۱) ۱/۵ ۲) ۴ ۳) ۵/۲۵ ۴) ۶

۲۴- گزینه‌ی «۳»

۱) برای پر کردن رقم صدگان، هر یک از ارقام $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۹\}$ قابل قبولند (۸ حالت).

$$\underset{۱}{۸}\times\underset{۲}{۹}\times\underset{۳}{۹}=۶۴۸$$

۲ و ۳) برای پر کردن رقم‌های دهگان و صدگان، هر یک از ارقام $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۹\}$ قابل قبولند (هر کدام ۹ حالت).

۲۵- گزینه‌ی «۱»

۱) برای رقم صدگان همه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی امکان‌پذیرند، پس ۹ راه برای پرکردن این رقم داریم.

۲) با معلوم بودن رقم صدگان، برای آنکه عدد ساخته شده متقارن باشد، باید یکان با صدگان برابر باشد، پس به ازای هر کدام از اعدادی که در رقم صدگان قرار می‌گیرند، یک راه برای پر کردن رقم یکان داریم.

۳) رقم دهگان هیچ محدودیتی ندارد و هر یک از اعداد حسابی تک رقم می‌تواند در آن قرار بگیرد، پس برای پر کردن آن ۱۰ راه وجود دارد.

$$\underset{۱}{۹}\times\underset{۳}{۱۰}\times\underset{۲}{۱}=۹۰$$

۲۶- گزینه‌ی «۱»

اگر عددی زوج باشد باید رقم یکان آن یکی از ارقام $\{۸,۶,۴,۲,۰\}$ باشد اما چون صفر نمی‌تواند رقم اول از سمت چپ باشد پس تعداد کل اعداد زوج را طی دو مرحله پیدا می‌کنیم.

الف) اگر رقم یکان صفر باشد

$$\square\ \square\ \boxed{۰}$$
$$۹\times۸\times۱=۷۲$$

ب) اگر رقم یکان از مجموعه‌ی $\{۸,۶,۴,۲\}$ باشد، (برای رقم یکان ۴ انتخاب و برای رقم صدگان ۸ انتخاب داریم (زیرا صفر نمی‌توانیم قرار دهیم):

$$\boxed{۸}\times\boxed{۸}\times\boxed{۴}=۲۵۶$$

$$۷۲+۲۵۶=۳۲۸$$

۲۷- گزینه‌ی «۴»

ابتدا تعیین می‌کنیم که سه خانواری که قرار است یک نفر از آن‌ها عضو شود کدامند، این کار به $\binom{۷}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است، پس از انتخاب سه خانوار از هر کدام به دو حالت، یک نفر می‌تواند انتخاب شود، بنابراین جواب این سؤال برابر است با:

$$\binom{۷}{۳}\times۲^{۳}=\frac{۷!}{۴!۳!}\times۸=\frac{۵\times۶\times۷}{۶}\times۸=۲۸۰$$

۲۸- گزینه‌ی «۳»

تعداد زیر مجموعه‌های **k** عضوی یک مجموعه‌ی **n** عضوی، برابر با $\binom{n}{k}$ است و تعداد کل زیر مجموعه‌های هر مجموعه‌ی **n** عضوی برابر با ۲^{n} است.

$$\binom{۹}{۰}+\binom{۹}{۱}+\underbrace{\binom{۹}{۲}+\dots+\binom{۹}{۸}}_{A:\ \text{تعداد حالت‌ها}}+\binom{۹}{۹}=۲^{۹}$$

$$۱+۹+A+۱=۵۱۲\Rightarrow A=۵۰۱$$

راهبرد حل تیپ (۷)

به قسمت «احتمال پیشامد تصادفی» در متن درس مراجعه کنید.

۲۹- گزینه‌ی «۴»

فضای پیشامد :

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{\text{صفر}}{\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۱}}\rightarrow ۴\times۳\times۱=۱۲\\ \overset{۲\ \text{یا}\ ۴}{\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۲}}\rightarrow ۳\times۳\times۲=۱۸\end{array}\right.$$

صفر نمی‌تواند بیاید

$$\Rightarrow n(A)=۱۲+۱۸=۳۰$$

فضای نمونه‌ای : $\boxed{۴}\boxed{۴}\boxed{۳}\rightarrow ۴\times۴\times۳=۴۸\Rightarrow n(S)=۴۸$

صفر نمی‌تواند بیاید

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۴۸}=\frac{۵}{۸}$$

۳۰- گزینه‌ی «۱»

اگر هیچ شرطی اعمال نشود، برای خارج کردن مهره‌ی اول، پنج حالت، مهره‌ی دوم، چهار حالت، مهره‌ی سوم، سه حالت، مهره‌ی چهارم، دو حالت و برای خارج کردن مهره‌ی پنجم یک حالت وجود دارد، پس با توجه به اصل ضرب، فضای نمونه‌ای در این سؤال $n(S)=۵!$ عضو دارد.
برای آنکه دو مهره با شماره‌ی فرد بطور متوالی خارج نشوند، باید مهره‌ها بصورت یک در میان فرد و زوج خارج شوند، توجه کنید که مهره‌ی اول نمی‌تواند زوج باشد، زیرا در اینصورت قطعاً دو مهره‌ی آخر فرد خواهند بود، بنابراین مهره‌ی اول باید فرد باشد و برای آن سه حالت وجود دارد، مهره‌ی دوم باید زوج باشد و برای آن دو حالت وجود دارد، مهره‌ی سوم باید فرد باشد و برای آن دو حالت (یکی از فردها در انتخاب اول خارج شده است) و در نتیجه برای مهره‌های چهارم و پنجم فقط یک حالت مطلوب امکان‌پذیر است؛ پس اگر پیشامد مطلوب را **A** بنامیم، طبق اصل ضرب $n(A)=۳\times۲\times۲\times۱\times۱$.

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۳\times۲\times۲\times۱\times۱}{۵!}=\frac{۱۲}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

راهبرد حل تیپ (۸)

در مسائلی که مجموع اعداد روشده در پرتاب دو تاس (یا دو بار پرتاب یک تاس) را مورد پرسش قرار می‌دهند، جدول زیر را در نظر بگیرید.

تعداد حالت‌ها	مجموع دو عدد روشده
۱	۲
۲	۳
۳	۴
۴	۵
۵	۶
۶	۷
۵	۸
۴	۹
۳	۱۰
۲	۱۱
۱	۱۲

از بالا به پایین تعداد حالت‌ها زیاد می‌شود.

بیشترین تعداد حالت‌ها

از پایین به بالا تعداد حالت‌ها زیاد می‌شود.

۳۱- گزینه‌ی «۳»

مجموع اعداد رو شده	تعداد حالت‌ها
۲	۱
۳	۲
۴	۳
۵	۴
۶	۵
۷	۶
۸	۵
۹	۴
۱۰	۳
۱۱	۲
۱۲	۱

اگر مجموع دو عدد رو شده چهار، هشت و یا دوازده باشد، مضرب چهار خواهد بود، یعنی $۳+۵+۱=۹$ حالت مطلوب وجود دارد؛ از طرفی می‌دانیم که فضای نمونه‌ای در پرتاب دو تاس $۶\times۶=۳۶$ عضو دارد، پس احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۳۶}$.

راهبرد حل تیپ (۹)
به قسمت‌های «ترکیب» و «احتمال پیشامد تصادفی» در متن درس مراجعه کنید.

۳۲- گزینه‌ی «۲»

۴ لامپ سوخته است. بنابراین ۶ لامپ سالم است. بنابراین سه لامپ گفته شده را از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم.

$$P\,(\text{هرسه سالم})=\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۶}$$

۳۳- گزینه‌ی «۲»

فضای نمونه‌ای انتخاب ۳ موش از کل یعنی $\binom{۱۱}{۳}$ است. فضای پیشامد یعنی هر سه موش سفید باشند عبارت است از: $\binom{۶}{۳}$، بنابراین داریم:

$$P(A)=\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{\frac{۶!}{۳!\times۳!}}{\frac{۱۱!}{۸!\times۳!}}=\frac{\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۶}}{\frac{۱۱\times۱۰\times۹\times۸!}{۸!\times۶}}=\frac{۲۰}{۱۶۵}=\frac{۴}{۳۳}$$

۳۴- گزینه‌ی «۳»

باید یک مهره‌ی سفید از ۵ مهره‌ی سفید و یک مهره‌ی سیاه از ۷ مهره‌ی سیاه انتخاب کنیم.

$$P\,(\text{همرنگ نبودن})=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۲}{۲}}=\frac{۳۵}{۶۶}$$

۳۵- گزینه‌ی «۳»

فضای نمونه‌ای انتخاب ۳ نفر از کل یعنی $\binom{۸}{۳}$ است. دو نفر از رشته‌ی ریاضی یعنی $\binom{۵}{۲}$ و یک نفر از رشته‌ی تجربی یعنی $\binom{۳}{۱}$، بنابراین داریم:

$$P=\frac{\binom{۵}{۲}\times\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۱۰\times۳}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۵!\times۳!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!\times۳\times۲\times۱}=۵۶$$

۳۶- گزینه‌ی «۳»

باید یک موش از سه موش سفید و سه موش از ۵ موش سیاه انتخاب کنیم.

$$P\,(\text{فقط یک موش سفید باشد})=\frac{\overset{\text{سفید}}{\binom{۳}{۱}}\times\overset{\text{سیاه}}{\binom{۵}{۳}}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{۳\times۱۰}{۷۰}=\frac{۳}{۷}$$

۳۷- گزینه‌ی «۲»

چون قرار است ۴ نفر معرفی شوند و از هر گروه فقط یک نفر انتخاب شود، لذا:

$$n(A)=\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}=۱\times۲\times۳\times۳$$

$$n(S)=\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۴!\times۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۴\times۳\times۲\times۱\times۵!}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱\times۲\times۳\times۳}{۹\times۲\times۷}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۷}$$

۳۸- گزینه‌ی «۳»

فضای نمونه‌ای انتخاب دو مهره از بین ۵ مهره یعنی $\binom{۵}{۲}$ است. برای آن‌که جمع دو عدد فرد باشد باید یکی از حالت‌های زیر انتخاب شود.

$$A=\{(۱,۲),(۱,۴),(۳,۲),(۳,۴),(۵,۲),(۵,۴)\}\Rightarrow n(A)=۶$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$$

دقت کنید که چون دو مهره با هم انتخاب می‌شوند حالت‌های $(۱\,,\,۲)$ با $(۲,۱)$ هیچ فرقی ندارند و به همین ترتیب برای بقیه. در ضمن تعداد اعضای پیشامد را به روش زیر نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$n(A)=\overset{\text{یک رقم فرد}}{\binom{۳}{۱}}\times\overset{\text{یک رقم زوج}}{\binom{۲}{۱}}=۳\times۲=۶$$

۳۹- گزینه‌ی «۱»

جمع دو کارت وقتی زوج است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

زوج : $\{۲,۴,۶\}$ فرد : $\{۱,۳,۵\}$

$$n(A)=\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}=۳+۳=۶\quad,\quad n(S)=\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!\times۴!}=۱۵$$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

۴۰- گزینه‌ی «۱»

پیشامد متوالی بودن اعداد مهره‌ها، ۵ عضو دارد:

$$A=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}$$

$$P(A:\text{متوالی بودن دو عدد})=\frac{۵}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

۴۱- گزینه‌ی «۱»

$$\text{پیشامد مطلوب}: A=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۳)\}$$

$$\text{احتمال مورد نظر}: P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۴}{۱۵}$$

۴۲- گزینه‌ی «۳»

فضای نمونه‌ای، انتخاب دو مهره از بین ۶ مهره است یعنی فضای نمونه‌ای $\binom{۶}{۲}$ عضو دارد. فضای پیشامد به‌صورت زیر است:

$$\text{مجموع اعداد مضرب ۳ باشد}\rightarrow A=\{(۱,۲),(۱,۵),(۲,۴),(۳,۶),(۴,۵)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۵\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

۴۳- گزینه‌ی «۲»

ابتدا تعداد کل اعداد طبیعی سه رقمی را که در آن‌ها رقم‌های یکان و صدگان با هم برابرند محاسبه می‌کنیم. اگر این عدد را بصورت $\boxed{\text{یکان}}\ \boxed{\text{دهگان}}\ \boxed{\text{صدگان}}$ در نظر بگیریم، برای رقم صدگان نُه حالت امکان‌پذیر است. با معلوم بودن رقم صدگان، از آن‌جا که باید رقم یکان با رقم صدگان برابر باشد، برای رقم یکان، یک حالت امکان‌پذیر است، اما برای رقم دهگان، ده حالت امکان‌پذیر است، پس با توجه به اصل ضرب، تعداد عددهای طبیعی سه رقمی که در آن‌ها رقم یکان با رقم صدگان برابر باشد، برابر $۹\times۱۰\times۱$ است؛ از آن‌جا که نهصد عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد، پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P=\frac{۹\times۱۰\times۱}{۹۰۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

۴۴- گزینه‌ی «۱»

با توجه به شکل، برای جایگاه (۱)، شش حالت امکان‌پذیر است (هر کدام از اتومبیل‌ها می‌توانند در این جایگاه قرار بگیرند)، بسته به اینکه اتومبیل پارک شده در جایگاه اول سیاه باشد یا سفید، برای جایگاه (۲)، سه حالت و با همین استدلال، برای جایگاه‌های (۳)، (۴)، (۵) و (۶) به‌ترتیب دو، دو، یک و یک حالت امکان‌پذیر است، داریم:

$$\underset{①}{\boxed{۶}}\times\underset{②}{\boxed{۳}}\times\underset{③}{\boxed{۲}}\times\underset{④}{\boxed{۲}}\times\underset{⑤}{\boxed{۱}}\times\underset{⑥}{\boxed{۱}}=۷۲$$

از طرفی اگر هیچ شرطی اعمال نشود، شش شیء (اتومبیل) در کنار هم $۶!=۷۲۰$ حالت جایگشت دارند، پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$\frac{۷۲}{۷۲۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

۴۵- گزینه‌ی «۱»

در این جعبه ۱۱ مهره وجود دارد که ۵ تای آنها سبز، ۴ تای آنها آبی و ۲ تای آنها زرد هستند. اگر بخواهیم فقط دو مهره از ۳ مهره‌ی انتخابی از این جعبه آبی باشند، باید ۲ مهره‌ی آبی از بین ۴ مهره‌ی آبی و یک مهره از بین ۷ مهره‌ی دیگر (سبزها و زردها) انتخاب کنیم که این کار طبق اصل ضرب به $n(A)=\binom{۴}{۲}.\binom{۷}{۱}$ حالت امکان‌پذیر است.

از طرفی اگر هیچ شرطی اعمال نشود، انتخاب ۳ مهره از بین ۱۱ مهره به $n(S)=\binom{۱۱}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است، پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{۶\times۷}{۱۶۵}=\frac{۱۴}{۵۵}$$

۴۶- گزینه‌ی «۲»

با توجه به جدول، تعداد کل کارکنان این اداره، برابر است با $۱۰+۱۵+۸۰+۹۰=۱۹۵$ که $۱۰+۱۵=۲۵$ از آنها تحصیلات دانشگاهی دارند، پس احتمال آنکه در این اداره «کارمندی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد»، برابر است با $P=\frac{۲۵}{۱۹۵}$.

همچنین با توجه به جدول، تعداد کل کارمندان مرد برابر است با $۱۵+۹۰=۱۰۵$ که ۱۵ نفر از آنها تحصیلات دانشگاهی دارند، پس احتمال آنکه در این اداره «کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد»، برابر است با $p=\frac{۱۵}{۱۰۵}$.

$$\Rightarrow\frac{P}{p}=\frac{\frac{۲۵}{۱۹۵}}{\frac{۱۵}{۱۰۵}}=\frac{۲۵\times۱۰۵}{۱۹۵\times۱۵}=\frac{۲۵\times(۷\times۱۵)}{(۱۳\times۱۵)\times۱۵}=\frac{۳۵}{۳۹}$$

راهبرد حل تیپ (۱۰)

به قسمت‌های «اشتراک دو پیشامد» و «اجتماع دو پیشامد» در متن درس مراجعه کنید.

۴۷- گزینه‌ی «۳»

هر کدام از سکه‌ها دو حالت و پرتاب تاس شش حالت دارد، پس فضای نمونه‌ای در این سؤال $n(S)=۲\times۲\times۶=۲۴$ عضو دارد؛ اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، داریم:

$$A=\{(\text{ر},\text{پ},۳),(\text{ر},\text{پ},۶),(\text{پ},\text{ر},۳),(\text{پ},\text{ر},۶),(\text{ر},\text{ر},۳),(\text{ر},\text{ر},۶)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۶$$

بنابراین احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$$

۴۸- گزینه‌ی «۲»

حداقل در یکی از دروس قبول شود، یعنی $A\cup B$.

A: فیزیک $\qquad B$: شیمی

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۷۵=۰/۵۵+۰/۶۰-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۵۵+۰/۶۰-۰/۷۵=۰/۴۰$$

۴۰ درصد امکان دارد که در هر دو درس قبول شود.

راهبرد حل تیپ (۱۱)

به قسمت «قانون جمع احتمال‌های پیشامدهای ناسازگار» در متن درس مراجعه کنید.

۴۹- گزینه‌ی «۱»

با توجه به شرایط مسأله، پیشامد همرنگ بودن ۳ مهره‌ی انتخابی (که احتمال آن را $\mathbf{P}$ در نظر می‌گیریم)، اجتماع دو پیشامد ناسازگار زیر است:

۱) هر سه مهره‌ی انتخابی سفید باشند:
$$P_۱ = \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}$$

۲) هر سه مهره‌ی انتخابی سیاه باشند:
$$P_۲ = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}$$

پس داریم:
$$P = P_۱ + P_۲ = \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴+۱۰}{۸۴} = \frac{۱۴}{۸۴} = \frac{۱}{۶}$$

راهبرد حل تیپ (۱۲)

به قسمت «متمم یک پیشامد» در متن درس مراجعه کنید.

۵۰- گزینه‌ی «۳»

اگر تاجر بودن را با $\mathbf{A}$ و برای اولین بار سفر کردن را با $\mathbf{B}$ نمایش دهیم، سؤال پیشامد $(A \cup B)'$ را خواسته است.
$$P(A\cup B)' = ۱ - P(A\cup B) = ۱ - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)]$$
$$= ۱ - \left[\frac{۲۳}{۷۲} + \frac{۱۲}{۷۲} - \frac{۸}{۷۲}\right] = ۱ - \frac{۲۷}{۷۲} = \frac{۴۵}{۷۲} = \frac{۵}{۸}$$

۵۱- گزینه‌ی «۴»

لااقل یک بار رقم ۲ ظاهر شود یعنی یا یک بار ظاهر شود یا دو بار یا سه بار. متمم این حالت‌ها این است که رقم ۲ ظاهر نشود. احتمال آن را حساب کرده و از یک کم می‌کنیم:

$$A : \text{رقم ۲ نیاید} \rightarrow n(A) = \boxed{۸}\overbrace{\boxed{۹}\boxed{۹}}^{\text{از ۱۰ رقم ممکن، ۲ نیامده}} = ۸\times۹\times۹$$

صفر نمی‌تواند بیاید

$$S : \text{کل اعداد سه رقمی} \rightarrow n(S) = \boxed{۹}\boxed{۱۰}\boxed{۱۰} = ۹\times۱۰\times۱۰$$

صفر نمی‌تواند بیاید

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۸\times۹\times۹}{۹\times۱۰\times۱۰} = \frac{۷۲}{۱۰۰}$$
$$\Rightarrow P(\text{رقم ۲ لااقل یک بار ظاهر شود})$$
$$= P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۷۲}{۱۰۰} = \frac{۲۸}{۱۰۰} = ۰/۲۸$$

۵۲- گزینه‌ی «۳»

حالتی که تعداد افراد دو گروه برابر باشند را حساب کرده و از روش متمم استفاده می‌کنیم. برابر بودن تعداد افراد دو گروه یعنی دو نفر از ۴ نفر ریاضی و دو نفر از ۶ نفر تجربی. بنابراین داریم:
$$P(\text{تعداد افراد دو گروه، متفاوت}) = ۱ - P(\text{تعداد افراد دو گروه، برابر})$$
$$= ۱ - \frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۴}} = ۱ - \frac{۶\times۱۵}{۲۱۰} = ۱ - \frac{۳}{۷} = \frac{۴}{۷}$$

توجه:
$$\binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰!}{۶!\times۴!} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!\times۴\times۳\times۲\times۱} = ۲۱۰$$

۵۳- گزینه‌ی «۴»

متمم پیشامد «لااقل یکی از موش‌های انتخاب شده سفید باشد»، آن است که «هیچ کدام از موش‌های انتخاب شده سفید نباشند»، یا به عبارت دیگر «همه‌ی موش‌های انتخاب شده سیاه باشند»، بنابراین احتمال مورد نظر برابر است:
$$۱ - \frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = ۱ - \frac{\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱}}{\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۳\times۲\times۱}} = ۱ - \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۱۴۵}{۱۶۵} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

۵۴- گزینه‌ی «۲»

متمم پیشامد آنکه «حداقل یک مهره‌ی آبی از ظرف خارج شود» آن است که «هیچ مهره‌ی آبی‌ای از ظرف خارج نشود»؛ پس:
$$P(\text{حداقل یک آبی}) = ۱ - P(\text{هیچ آبی}) \quad (*)$$
برای آنکه هیچ مهره‌ی آبی‌ای از ظرف خارج نشود، باید هر سه مهره‌ی انتخابی از میان سه مهره‌ی قرمز و دو مهره‌ی سیاه انتخاب شوند، پس:
$$(*) \Rightarrow P(\text{حداقل یک آبی}) = ۱ - \frac{\binom{۳+۲}{۳}}{\binom{۴+۳+۲}{۳}}$$
$$= ۱ - \frac{۱۰}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

۵۵- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم که فضای نمونه‌ای تعداد فرزندان یک خانواده‌ی ۴ فرزندی $۲^۴$ عضو دارد، یعنی $n(S) = ۲^۴$. از طرفی پیشامد آنکه «فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد» که آن را $\mathbf{A}$ می‌نامیم بصورت:
$$A = \{bgbg, gbgb, bggb, gbbg, ggbb, bbgg\}$$
است که همانطور که مشاهده می‌شود $n(A) = ۶$، پس
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

توجه: پیشامد آنکه «فرزندان خانواده‌ی ۴ فرزندی یک در میان پسر باشند»، زیرمجموعه‌ی پیشامد «خانواده‌ی ۴ فرزندی، ۲ فرزند پسر داشته باشد» است، بنابراین اجتماع آنها، برابر پیشامد «خانواده‌ی ۴ فرزندی، ۲ فرزند پسر داشته باشد» است.

۵۶- گزینه‌ی «۲»

$$A\cap B = \{\text{پ ر ر، ر پ ر، ر ر پ}\} \Rightarrow n(A\cap B) = ۳$$

از طرفی، در پرتاب سه سکه، فضای نمونه‌ای دارای $n(S) = ۲^۳$ عضو است، پس:
$$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

۵۷- گزینه‌ی «۱»

فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به صورت زیر است:
$$S = \{\underline{۱۱}, \underline{۱۲}, \underline{۱۴}, \underline{۱۵}, \underline{۲۱}, \underline{۲۲}, \underline{۲۴}, \underline{۲۵}, ۴۱, ۴۲, \underline{۴۴}, ۴۵, ۵۱, \underline{۵۲}, ۵۴, ۵۵\} \Rightarrow n(S) = ۱۶$$

در حالت‌هایی که زیر آنها خط کشیده شده است، عدد ساخته شده کوچکتر از ۴۰ یا مضرب ۴ است، یعنی $n(A) = ۱۰$، بنابراین
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۵۸- گزینه‌ی «۱»

هر دو هم رشته باشند یعنی اجتماع دو پیشامد ناسازگار «هر دو تجربی باشند» و «هر دو ریاضی باشند» است. فضای نمونه‌ای هم که انتخاب دو نفر از کل یعنی $\binom{۵}{۲}$ است.

هر دو تجربی یا هر دو ریاضی

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}+\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳+۱}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۵۹- گزینه‌ی «۳»

ابتدا پیشامد A را مشخص می‌کنیم:

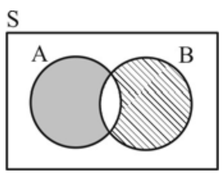
$$A=\{\underline{gggg},\underline{bggg},\underline{gbgg},bbgg\}$$

برای بدست آوردن پیشامد $A-C$، باید حالت‌هایی را که در آنها تعداد فرزندان دختر بیش از تعداد فرزندان پسر است، (حالت‌هایی که زیر آنها خط کشیده شده است) را از A حذف کنیم، پس $A-C=\{bbgg\}$، یعنی $n(A-C)=۱$.

از طرفی می‌دانیم که فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی، $n(S)=۲^۴$ حالت دارد، پس:

$$P(A-C)=\frac{n(A-C)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۶}$$

۶۰- گزینه‌ی «۴»



می‌دانیم که پیشامد $A\cup B$ یعنی «A رخ دهد یا B رخ دهد یا هر دوی آنها رخ دهند»، حال اگر بخواهیم «فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد»، باید قسمتی که «هم A و هم B رخ می‌دهند» (یعنی $A\cap B$) را از $A\cup B$ حذف کنیم. که در این صورت اجتماع دو قسمت سایه خورده و هاشورخورده در شکل بالا به‌دست می‌آید. قسمت سایه خورده مجموعه‌ی $A-B$ و قسمت هاشورخورده مجموعه‌ی $B-A$ است و اجتماع آنها یعنی $(A-B)\cup(B-A)$ پیشامد مورد نظر سؤال است.

۶۱- گزینه‌ی «۳»

احتمال این‌که مجموع دو تاس بزرگتر یا مساوی ۱۱ باشد را حساب کرده و از یک کم می‌کنیم:

$$n(S)=۶\times۶=۳۶$$

مجموع بزرگتر یا مساوی۱۱ $: A=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(\text{کوچکتر از ۱۱})=P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

راهبرد حل تیپ (۱۳)
به قسمت «تعریف احتمال شرطی» در متن درس مراجعه کنید.

۶۲- گزینه‌ی «۳»

با توجه به این که می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، فضای نمونه‌ای به صورت مقابل خواهد بود: $S=\{bb,gb,bg\}\Rightarrow n(S)=۳$

فضای پیشامد داشتن دختر یعنی $\{gb,bg\}$ است. بنابراین داریم:

$$n(A)=۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۳}$$

۶۳- گزینه‌ی «۴»

با توجه به این که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است، فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S=\{gbb,bgb,bbg,gbg,ggb,bgg,ggg\}$$
$$\Rightarrow n(S)=۷$$

پیشامد حداقل ۲ دختر یعنی ۲ دختر یا ۳ دختر. بنابراین پیشامد به‌صورت زیر است:

$$A=\{ggb,bgg,gbg,ggg\}\Rightarrow n(A)=۴$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۷}$$

۶۴- گزینه‌ی «۴»

چون جنسیت فرزند اول مشخص است در واقع با فضای نمونه‌ای دو فرزند دیگر روبه‌رو هستیم: $n(S)=۴$

$$A=\{\text{حداقل یک پسر باشد}\}=\{(\text{پ،پ})\text{ و }(\text{پ،د})\text{ و }(\text{د،پ})\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۳\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۴}$$

۶۵- گزینه‌ی «۳»

پیشامد A را ظاهر شدن عدد ۲ و پیشامد B را مضرب ۳ نبودن تعریف می‌کنیم. سؤال، $P(A|B)$ را خواسته است.

$$A=\{۲\}\ \text{ و }\ B=\{۱,۲,۴,۵\}\Rightarrow A\cap B=\{۲\}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۴}{۶}}=\frac{۱}{۴}$$

راهبرد حل تیپ (۱۴)
به قسمت‌های «قانون جمع احتمال‌های پیشامدهای ناسازگار» و «نتیجه‌ی مهم تعریف احتمال شرطی» در متن درس مراجعه کنید.

۶۶- گزینه‌ی «۴»

از دو موش باید یکی سالم و دیگری دیابتی باشد. بیمار یا سالم بودن موش‌ها نیز مستقل از هم‌دیگر است. در ضمن دو حالت در مورد دو موش وجود دارد. یا موش اول دیابتی و موش دوم سالم است و یا برعکس.

$$P(\text{دومی دیابتی و اولی سالم})+P(\text{دومی سالم و اولی دیابتی})$$
$$=P(\text{اولی سالم}).P(\text{دومی دیابتی}|\text{اولی سالم})$$
$$+P(\text{اولی دیابتی}).P(\text{دومی سالم}|\text{اولی دیابتی})$$
$$=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۳۰}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۶۷- گزینه‌ی «۴»

دو حالت داریم:

۱- موش اول سفید، <u>موش دوم سفید</u>، موش سوم سیاه:

$$P_۱=\left(\frac{۵}{۳+۵}\right)\left(\frac{۴}{۳+۴}\right)\left(\frac{۳}{۳+۳}\right)=\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۵}{۲۸}$$

۲- موش اول سفید، <u>موش دوم سیاه</u>، موش سوم سیاه:

$$P_۲=\left(\frac{۵}{۳+۵}\right)\left(\frac{۳}{۳+۴}\right)\left(\frac{۲}{۲+۴}\right)=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۵}{۵۶}$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

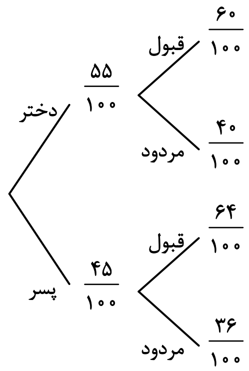
$$P=P_۱+P_۲=\frac{۵}{۲۸}+\frac{۵}{۵۶}=\frac{۱۰}{۵۶}+\frac{۵}{۵۶}=\frac{۱۵}{۵۶}$$

دقت کنید که چون موش‌ها متوالیاً انتخاب شده‌اند، یعنی یکی یکی انتخاب شده‌اند، پس در هر انتخاب یکی از تعداد کل کم می‌شود.

راهبرد حل تیپ (۱۵)
به قسمت «قانون احتمال کل» در متن درس مراجعه کنید.

۶۸- گزینه‌ی «۲»

۵۵ درصد دختر هستند پس ۴۵ درصد پسر هستند. به نمودار زیر دقت کنید:



$$P\,(\text{تمام واحدها را گذرانده‌اند})$$

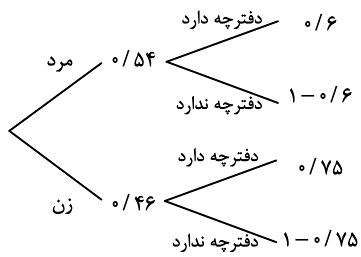
$$= P\,(\text{دختر و گذراندن تمام واحدها}) + P\,(\text{پسر و گذراندن تمام واحدها})$$

$$= \frac{۵۵}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}+\frac{۴۵}{۱۰۰}\times\frac{۶۴}{۱۰۰}=\frac{۳۳۰۰}{۱۰۰۰۰}+\frac{۲۸۸۰}{۱۰۰۰۰}$$

$$= \frac{۶۱۸۰}{۱۰۰۰۰}=\frac{۶۱۸}{۱۰۰۰}\xrightarrow{\times ۱۰۰}\frac{۶۱۸}{۱۰}=۶۱/۸\ \text{درصد}$$

۶۹- گزینه‌ی «۲»

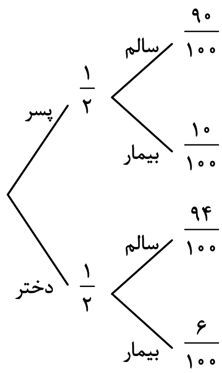
با استفاده از نمودار درختی، مسأله را حل می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر}: P = ۰/۵۴\times ۰/۶۰ + ۰/۴۶\times ۰/۷۵ = ۰/۶۶۹$$

۷۰- گزینه‌ی «۲»

فرزندی که به دنیا می‌آید پسر است یا دختر. به نمودار زیر توجه کنید.

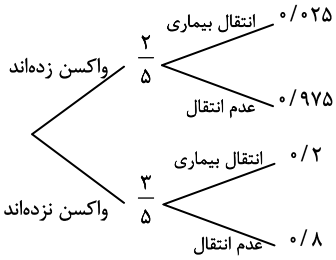


$$P\,(\text{فرزند سالم}) = P\,(\text{پسر و سالم}) + P\,(\text{دختر و سالم})$$

$$= \frac{۱}{۲}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۹۴}{۱۰۰}=۰/۹۲$$

۷۱- گزینه‌ی «۱»

$\frac{۲}{۵}$ کارگران واکسن زده‌اند ، پس $\frac{۳}{۵}$ آنها واکسن نزده‌اند. به نمودار زیر دقت کنید:



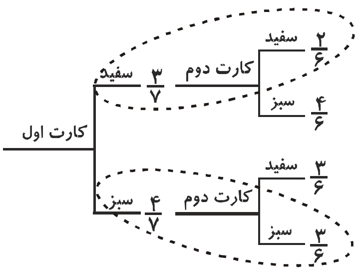
$$P\,(\text{انتقال بیماری})$$

$$= P\,(\text{واکسن زده است و منتقل شده}) + P\,(\text{واکسن نزده و منتقل شده})$$

$$= \frac{۲}{۵}\times ۰/۰۲۵+\frac{۳}{۵}\times ۰/۲=\frac{۵۰}{۵۰۰۰}+\frac{۶}{۵۰}=\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱۲}{۱۰۰}=\frac{۱۳}{۱۰۰}$$

۷۲- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: با استفاده از نمودار درختی، مساله را حل می‌کنیم:



پس احتمال همرنگ بودن دو کارت انتخاب شده، برابر است با:

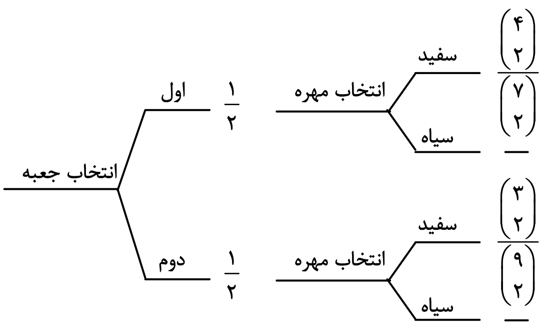
$$P=\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۷}\Rightarrow P=\frac{۳}{۷}$$

راه حل دوم: احتمال اینکه دو کارت را به صورت یکی یکی و بدون جاگذاری انتخاب کنیم با احتمال اینکه دو کارت را به صورت هم‌زمان انتخاب کنیم برابر است.

$$P\,(\text{دو کارت همرنگ}) = \frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۳+۶}{۲۱}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷}$$

۷۳- گزینه‌ی «۱»

از نمودار درختی استفاده می‌کنیم، با استفاده از قانون احتمال کل، داریم:



$$\text{احتمال مورد نظر}: P=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{۴\times ۳}{۲}}{\frac{۷\times ۶}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{\frac{۹\times ۸}{۲}}=\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۳۱}{۱۶۸}$$

۷۴- گزینه‌ی «۱»

دقت کنید که چون می‌خواهیم احتمال آن را بیابیم که ۲ مهره از ۴ مهره‌ی انتخابی سفید باشد بنابراین باید ۲ مهره‌ی دیگر سیاه باشند و چون سه ظرف داریم، احتمال انتخاب هر یک از ۳ ظرف $\frac{1}{3}$ است. احتمال آنکه از هر ظرف ۲ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی سفید خارج شود را پیدا می‌کنیم.

احتمال انتخاب ظرف A $\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{6\times 10}{126}$

احتمال انتخاب ظرف B $\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{15\times 3}{126}$

احتمال انتخاب ظرف C $\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{15\times 3}{126}$

$$\Rightarrow p(E)=\frac{1}{3}\left(\frac{60}{126}+\frac{45}{126}+\frac{45}{126}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{150}{126}=\frac{50}{126}=\frac{25}{63}$$

توجه کنید:

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\Rightarrow \binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15,\quad \binom{5}{2}=\frac{5\times 4}{2}=10$$

راهبرد حل تیپ (۱۶)

به قسمت «قانون ضرب احتمال‌های پیشامدهای مستقل» در متن درس مراجعه کنید.

۷۵- گزینه‌ی «۲»

جنسیت فرزندان مستقل از هم‌دیگر است. این‌که دو فرزند اول پسر هستند، تأثیری در فرزندان سوم و چهارم ندارد.

$$P\ (\text{فرزند سوم و چهارم دختر})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

۷۶- گزینه‌ی «۴»

$$P(A)=\frac{7}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{6}{7}$$

تعداد انتخاب‌های نفر دوم ۶ روز هفته می‌باشد. زیرا نمی‌بایستی در روزی که نفر اول متولد شده است به دنیا آمده باشد و یک انتخاب کمتر دارد.

راهبرد حل تیپ (۱۷)

به قسمت‌های «متمم یک پیشامد» و «قانون ضرب احتمال‌های پیشامدهای مستقل» در متن درس مراجعه کنید.

۷۷- گزینه‌ی «۳»

احتمال آنکه در هر تاس عدد ۵ و ۶ ظاهر نشود $\frac{4}{6}$ است، پس:

احتمال ظاهر نشدن ۵ و ۶ در هر دو تاس : $P(A')=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

احتمال ظاهرشدن ۵ یا ۶ در هر دو : $P(A)=1-P(A')=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

۷۸- گزینه‌ی «۲»

احتمال آنکه ماه تولد این ۴ نفر متفاوت باشد، برابر است با:

$$\frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}=\frac{55}{96}$$

متمم پیشامد آنکه «ماه تولد حداقل دو نفر از ۴ نفر یکسان باشد» آن است که «ماه تولد هر ۴ نفر متفاوت باشد»، پس با توجه به خواص پیشامد متمم، می‌توان نوشت:

احتمال مورد نظر : $P=1-\frac{55}{96}=\frac{41}{96}$

راهبرد حل تیپ (۱۸)

به قسمت‌های «قانون جمع احتمال‌های پیشامدهای ناسازگار» و «قانون ضرب احتمال‌های پیشامدهای مستقل» در متن درس مراجعه کنید.

۷۹- گزینه‌ی «۲»

ابتدا توجه کنید که در هر بار پرتاب هر تاس، احتمال زوج آمدن عدد رو شده برابر $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ است.

سه حالت مطلوب امکان‌پذیر است که با توجه به مستقل بودن پرتاب تاس‌ها از هم، می‌توان نوشت:

۱) در پرتاب اول، هر دو تاس زوج بیایند: $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

۲) در پرتاب دوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_2=\underbrace{(1-\overset{\text{هر دو زوج}}{\frac{1}{4}})}_{\text{پرتاب اول}}\ \underbrace{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})}_{\text{پرتاب دوم}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

۳) در پرتاب سوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_3=\underbrace{(1-\overset{\text{هر دو زوج}}{\frac{1}{4}})}_{\text{پرتاب اول}}\ \underbrace{(1-\overset{\text{هر دو زوج}}{\frac{1}{4}})}_{\text{پرتاب دوم}}\ \underbrace{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})}_{\text{پرتاب سوم}}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$

چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر}: P=P_1+P_2+P_3$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}=\frac{16}{64}+\frac{12}{64}+\frac{9}{64}=\frac{16+12+9}{64}=\frac{37}{64}$$

راهبرد حل تیپ (۱۹)

به قسمت‌های «اجتماع دو پیشامد» و «پیشامدهای مستقل» در متن درس مراجعه کنید.

۸۰- گزینه‌ی «۱»

A : پیشامد آن‌که فرد انتخاب شده، تحصیلات ابتدایی داشته باشد.

B : پیشامد آن‌که فرد انتخاب شده، مهارت قالی‌بافی داشته

پس $A\cup B$، پیشامد آن است که فرد انتخاب شده تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی داشته باشد، داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

از آن‌جا که دو پیشامد A و B مستقلند، پس:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

بنابراین:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$
$$=0/6+0/25-(0/6)(0/25)=0/85-0/15=0/7$$

۸۱- گزینه‌ی «۴»

اعداد ظاهر شده در هر تاس باید کم‌تر از ۴ باشد یعنی ۱، ۲ و یا ۳، بنابراین برای هر یک از دو تاس سه حالت وجود دارد، پس:

$$n(S) = ۳ \times ۳ = ۹$$

اگر A پیشامد این باشد که قدر مطلق تفاضل اعداد ظاهر شده برابر یک نباشد، آنگاه داریم:

$$A = \{(۱,۱),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳)\} \Rightarrow n(A) = ۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۹}$$

۸۲- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم $A \cap B' = A - B$ و $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$، همچنین $P(B') = ۱ - P(B)$، پس:

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A-B)}{P(B')}$$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{۱ - P(B)} \quad (*)$$

طبق فرض $P(A|B') = ۰/۴$ و $P(B) = ۰/۳$، بنابراین از $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$۰/۴ = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{۱ - ۰/۳} \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = ۰/۲۸ \quad (**)$$

از طرفی $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$، پس اگر به طرفین تساوی $(**)$، $P(B)$ را اضافه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۲۸ + P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = ۰/۲۸ + ۰/۳ = ۰/۵۸$$

۸۳- گزینه‌ی «۲»

برای آنکه در پرتاب هر کدام از تاس‌ها، عدد رو شده مضرب ۳ نباشد، باید یکی از اعداد $\{۱,۲,۴,۵\}$ رو شود، که احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$.

از آنجا که پرتاب دو تاس مستقل از هم است، احتمال آنکه عدد رو شده در پرتاب هر دو تاس مضرب ۳ نباشد، برابر است با: $\frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۹}$.

۸۴- گزینه‌ی «۴»

اگر A پیشامد متمایز بودن سه عدد رو شده باشد، آنگاه:

$$P(A) = \frac{۶}{۶} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۴}{۶}$$

اگر B پیشامد «مساوی بودن هر ۳ عدد در ۳ بار پرتاب یک تاس باشد»، آنگاه:

$$B = \{(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),...,(۶,۶,۶)\} \Rightarrow n(B) = ۶$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۶^۳}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶^۳}}{\frac{۶}{۶^۳}} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶} = ۵ \times ۴ = ۲۰$$

۸۵- گزینه‌ی «۳»

یکی از اعضای تیم را در نظر می‌گیریم. برای این فرد هر ۱۲ ماه سال مطلوب است، اما نفر بعدی باید در ماهی غیر از ماه نفر اول باشد، پس برای فرد دوم ۱۱ ماه از سال مطلوب است. برای فرد سوم، ۱۰ ماه از سال مطلوب است (ماه‌هایی بجز ماه‌های تولد نفرات اول و دوم) و ...

به همین ترتیب برای نفر ششم ۷ ماه از سال مطلوب است (ماه‌هایی بجز ماه‌های تولد نفرات اول تا پنجم).

از آنجایی که ماه تولد افراد مستقل از هم است، احتمال پیشامد مورد نظر، برابر است با:

$$\frac{۱۲}{۱۲} \times \frac{۱۱}{۱۲} \times ... \times \frac{۷}{۱۲} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ... \times ۷}{۱۲^۶}$$

طبق تعریف «ترتیب»، می‌دانیم

$$P(۱۲,۶) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۶)!} = ۱۲ \times ۱۱ \times ... \times ۷$$

پس احتمال مورد نظر، برابر با $\frac{P(۱۲,۶)}{۱۲^۶}$ است.

۸۶- گزینه‌ی «۲»

پیشامد بهبود شخص A بعد از عمل جراحی را با A و پیشامد بهبود شخص B را با B نمایش می‌دهیم؛ پیشامد $A \cup B$ مورد نظر سؤال است:

می‌دانیم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (*)$

در این مسأله، A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{*} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$

$$= ۰/۸ + ۰/۶ - ۰/۸ \times ۰/۶ = ۰/۹۲$$

۸۷- گزینه‌ی «۱»

متمم پیشامد آنکه «حداقل یک از دو فرد A و B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند»، آن است که «هر دو فرد A و B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا بکنند»، که با توجه به مستقل بودن دو فرد A و B، احتمال اخیر، برابر است با:

$$۰/۶ \times ۰/۷ = ۰/۴۲$$

بنابراین احتمال مورد نظر سؤال، برابر می‌شود با:

$$P = ۱ - ۰/۴۲ = ۰/۵۸$$

۸۸- گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم برای آنکه فردی دارای RH منفی باشد، لازم است دو ژن منفی داشته باشد و چون این ژن‌ها را از والدین خود به ارث می‌برد، می‌توانیم منفی بودن هر یک از این ژن‌ها را مستقل فرض کنیم، بنابراین:

$$P(\text{منفی باشد } RH) = P(\text{هر دو ژن منفی}) = ۰/۴ \times ۰/۴ = ۰/۱۶$$

همچنین:

$$P(\text{منفی نباشد } RH) = ۱ - P(\text{منفی باشد } RH)$$

$$= ۱ - ۰/۱۶ = ۰/۸۴$$

$$\Rightarrow \frac{P(\text{منفی نباشد } RH)}{P(\text{منفی باشد } RH)} = \frac{۰/۸۴}{۰/۱۶} = ۵/۲۵$$