فصل پنجم ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

۱ تابع نمایی و ویژگی‌های آن

معرفی تابع نمایی

به هر تابع به فرم $f\left(x\right)=a^{x}$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک $\left(a>۰,a\neq ۱\right)$ و توان آن متغیر x است، یک تابع نمایی می‌گوییم. به عنوان مثال توابع $f\left(x\right)=۵^{x},g\left(x\right)=۳^{-x},h\left(x\right)=\left(\sqrt[۴]{۵}\right)^{۳x},\ldots$ همگی تابع نمایی هستند. و توابع $g\left(x\right)=\left(-\sqrt{x}\right)^{x}$ و $h\left(x\right)=\left(۱\right)^{۲x-۱}$ نمایی نمی‌باشند.

یادآوری توان‌های گویا و حقیقی

تعریف توان: اگر چند عدد یکسان در هم ضرب شوند، آن ها را به‌صورت نمایی یا توانی نمایش می‌دهیم. a^{n} خوانده می‌شود a به توان، (نما، قوه ی) n.

$$\underbrace{a\times a\times\ldots\ldots\times a}_{n}=a^{n}$$

نوشتن ضابطه تابع نمایی

برای نوشتن ضابطه یک تابع نمایی به دو نقطه نیاز داریم که در تابع صدق دهیم. در حالت کلی ضابطه را به‌صورت $f(x)=ka^{x}$ در نظر می‌گیریم تا با صدق نقاط، مجهول‌های a و k به‌دست آیند.

▼مثال ۱) اگر تابع $f\left(x\right)=\left(\dfrac{۲a-۱}{۳}\right)^{-x}$ یک تابع نمایی باشد، حدود a را به‌دست آورید.

(صفحه ۹۹ کتاب درسی)

پاسخ *شرط اول نمایی بودن، آن است که پایه مثبت باشد:*

$$\frac{۲a-۱}{۳}>۰\Rightarrow a>\frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

شرط دوم نمایی بودن آن است که پایه عدد یک نباشد: $\frac{2a-1}{3} \neq 1 \Rightarrow a \neq 2 \qquad (2)$

$$(1)\bigcap(2) \Rightarrow a \in \left(\frac{1}{2},+\infty\right)-\{2\}$$

▼مثال ۲) اگر تابع $f(x)=(a^2-2a)^{2x}$ یک تابع نمایی باشد، a در کدام بازه قرار دارد؟

(صفحه ۹۹ کتاب درسی)

پاسخ شرط اول نمایی بودن، آن است که پایه مثبت باشد: $a<0$ یا $a^2-2a>0 \Rightarrow a>2$

شرط دوم نمایی بودن آن است که پایه عدد یک نباشد: $a^2-2a \neq 1 \Rightarrow a \neq 1\pm\sqrt{2}$

$$(1)\bigcap(2) \Rightarrow a \in (-\infty,0)\bigcup(2,+\infty)-\left\{1\pm\sqrt{2}\right\}$$

▼مثال ۳) به ازای چه مقادیری از a، تابع $f(x)=(2a-1)^x$ یک تابع نمایی است؟

(صفحه ۹۹ کتاب درسی – آزمون کانون – ۹۲)

۱) $(\frac{1}{2},+\infty)$ ۲) $(\frac{1}{2},+\infty)-\{1\}$ ۳) $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ ۴) $\mathbf{R}$

پاسخ کافی است $(2a-1)$ عددی، مثبت و مخالف یک باشد.

$$\begin{cases} 2a-1 \neq 1 \Rightarrow 2a \neq 2 \Rightarrow a \neq 1 \\ 2a-1>0 \Rightarrow 2a>1 \Rightarrow a>\frac{1}{2} \Rightarrow a \in (\frac{1}{2},+\infty) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a\neq 1} a \in (\frac{1}{2},+\infty)-\{1\}$$

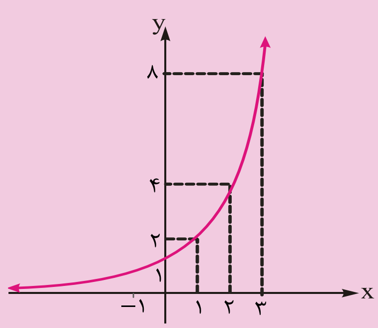
گزینه ۲ صحیح است.

نمودار تابع نمایی $y=a^x$ را در دو حالت $(0<a<1)$ و $(a>1)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱) رسم نمودار $y=a^x$ بافرض $(a>1)$

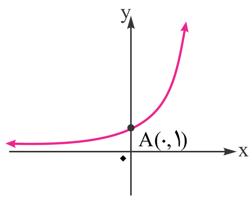
اگر فرض کنیم $a=2$ باشد، در این صورت نمودار تابع $y=2^x$ را به کمک نقطه یابی در دستگاه مختصات دکارتی رسم می‌کنیم.

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...



نتایج مهم به‌دست آمده:

با توجه به شکل رسم شده می‌توان نتایج کلی زیر را برای تابع $f(x)=a^x$ باشد $(a>۱)$ به‌دست آورد:



(۱) نمودار و شکل کلی توابع به فرم $y=a^x$ با فرض $(a>۱)$ به‌صورت مقابل است:

(۲) این نمودار همواره دارای عرض از مبدأ «۱» خواهد بود.

(۳) این نمودار فاقد طول از مبدأ است و محور x ها را قطع نمی‌کند، زیرا برای $y=a^x$ ، xای وجود ندارد که آن را صفر کند.

(۴) تابعی یک به یک است، زیرا هر خط موازی محور x ها، نمودار را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.

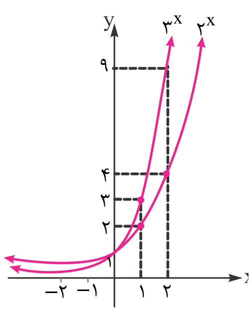
(۵) این تابع در $\mathbb{R}$ وارون پذیر است، زیرا یک به یک است.

(۶) صعودی است، زیرا با افزایش مقادیر x، مقادیر y نیز افزایش می‌یابد.

(۷) دامنه تابع برابر اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ و برد آن $(۰,+\infty)$ است.

برای بررسی میزان رشد توابع نمایی و وضعیت قرارگیری توابع نمایی در دستگاه مختصات، نمودار توابع $f(x)=۲^x,\ g(x)=۳^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم.

x	...	-۲	-۱	۰	۱	۲
۲^x	...	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
۳^x	...	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹



نتیجه‌ی مهم:

اگر $x>۰$ باشد، نمودار ۳^x بالاتر از ۲^x است $(۳^x>۲^x)$ ولی اگر $x<۰$ نمودار ۳^x پایین تر از ۲^x است $(۳^x<۲^x)$. پس به عبارت دیگر در توابع $f(x)=a^x$ باشرط $(a>۱)$ اگر عدد a بزرگ‌تر شود، در توان‌های مثبت رشد آن نیز بیشتر شده و نمودار آن نیز بالاتر قرار می‌گیرد ولی در توان‌های منفی رشد آن کمتر شده و نمودار آن نیز پایین تر قرار می‌گیرد.

بیان ریاضی: در توابع $y=a^x$ و $y=b^x$ با شرط $(a>b>۱)$

(۱) $x<۰ \Rightarrow a^x<b^x$

(۲) $x>۰ \Rightarrow a^x>b^x$

▼**مثال ۴)** اگر $f(x)=۳^x$ باشد، مقدار $f(x+۲)-۲f(x+۱)$ را محاسبه کنید.

(صفحه‌های ۹۷ و ۹۸ کتاب درسی)

پاسخ

$$f(x+۲)-۲f(x+۱)=۳^{x+۲}-۲(۳^{x+۱})=۳^x\times ۳^۲-۲(۳^x\times ۳^۱)$$
$$=۹(۳^x)-۶(۳^x)=۳^x(۹-۶)=۳^x\times ۳=۳f(x)=۳^{x+۱}$$

▼مثال ۵) به ازای کدام مقدار a تابع نمایی $f(x)=(2a-a^2)^x$ ، صعودی است؟

(صفحه‌های ۹۸ و ۹۹ کتاب درسی)

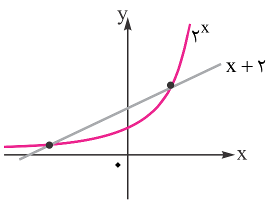
پاسخ

شرط صعودی بودن تابع نمایی آن است که پایه بزرگ‌تر از عددیک باشد:

$2a-a^2>1 \Rightarrow a^2-2a+1<0 \Rightarrow (a-1)^2<0$ نشدنی و فاقد جواب

▼مثال ۶) تعداد نقاط تلاقی خط $y=x+2$ و نمودار $f(x)=2^x$ را تعیین کنید.

(صفحه‌های ۹۸ و ۹۹ کتاب درسی)

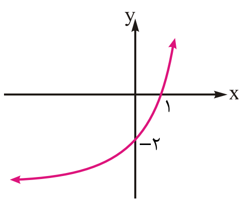


پاسخ

تعداد نقاط تلاقی خط $y=x+2$ و تابع $f(x)=2^x$ همان تعداد ریشه های معادله $2^x=x+2$ بوده که بهترین راه حل به شیوه رسم نمودار (هندسی) است.که با توجه به شکل دارای ۲ نقطه تلاقی است.

▼مثال ۷) نمودار تابع زیر دارای ضابطه $f(x)=a\times 2^{x+1}+b$ است. $a+b$ را محاسبه کنید.

(صفحه‌های ۹۸ و ۹۹ کتاب درسی)



پاسخ

$$f(1)=0 \Rightarrow a\times 2^2+b=0 \Rightarrow 4a=-b \qquad (1)$$
$$f(0)=-2 \Rightarrow a\times 2^1+b=-2 \Rightarrow 2a=-b-2 \qquad (2)$$
$$\xrightarrow{(1),(2)} a=1, b=-4 \Rightarrow a+b=-3$$

▼مثال ۸) در کدام‌یک از جدول‌های زیر، تابع f رفتار نمایی دارد؟

(صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ کتاب درسی– آزمون کانون – ۹۱)

۱)

x	۱	۲	۴	۸
f(x)	۱	۳	۵	۷

۲)

x	۱	۲	۴	۸
f(x)	۱	۳	۹	۲۷

۳)

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	۱	۳	۵	۷

۴)

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	۱	۳	۹	۲۷

پاسخ

در گزینه‌ی «۴» مقادیر x به صورت منظم به فاصله‌ی یک واحد اضافه می‌شوند، هم‌چنین مقادیر f(x) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{\times 3} 27$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ، مقادیر f(x) با ضرب یک عدد ثابت در عدد قبلی به‌دست می‌آیند، لذا این داده‌ها می‌توانند بیان‌گر رفتار یک تابع نمایی باشند.

گزینه ۴ صحیح است.

▼مثال ۹) با ذکر دلیل، مشخص کنید که آیا داده‌های زیر در هر جدول، بیان‌گر یک تابع نمایی است یا خیر؟

(صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ کتاب درسی– مشهد– بجنوردی– ۸۹)

الف)

x	−۱	۰	۱	۲
y	−۱۵	۱/۵	−۲	۴

ب)

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y	۸۰	۴۰	۲۰	۱۰	۵	۲/۵

پاسخ

الف)

	x_1	x_2	x_3	x_4
x	-1	0	1	2
y	-15	$1/5$	-2	4
	y_1	y_2	y_3	y_4

ملاحظه می‌کنید که مقادیر x، به صورت منظم، به فاصله‌ی یک واحد اضافه می‌شود، اما:

$$\begin{cases} \dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{1/5}{-15}=\dfrac{-1}{10} \\ \dfrac{y_3}{y_2}=\dfrac{-2}{1/5}=\dfrac{-2}{\frac{3}{2}}=\dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

چون $\dfrac{y_3}{y_2}\neq\dfrac{y_2}{y_1}$، پس این جدول نمی‌تواند بیان‌گر یک تابع نمایی باشد.

ب)

x	0	10	20	30	40	50
y	80	40	20	10	5	$2/5$

$$80 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 40 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 20 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 10 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 5 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 2/5$$

اولاً ملاحظه می‌کنید که مقادیر x به صورت منظم، به فاصله‌ی ده واحد اضافه می‌شود، ثانیاً مقدار هر y، از ضرب y قبلی در عدد $\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید، پس این جدول، بیان‌گر یک تابع نمایی است.

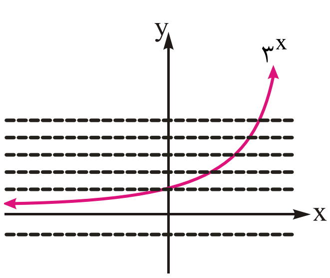
نکته: توابع $f(x)=a^x$، چه در حالت $(a>1)$ و چه در حالت $(0<a<1)$ همواره مثبت بوده و بالای محور x ها (خط $y=0$) هستند. همچنین به علت وجود این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که قدر مطلق روی آن ها تأثیری نمی‌گذارد و داریم:

$$f(x)=\left|2^x\right|=2^x \quad \text{و} \quad g(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

▼ **مثال ۱۰)** معادله $\left|3^x\right|=K+1$ حداکثر دارای چند ریشه است؟

(صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۰ کتاب درسی)

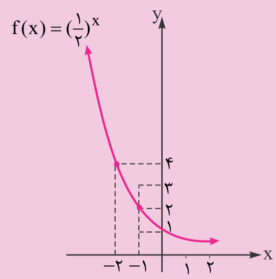
پاسخ بهترین شیوه رسم هر دو سمت تساوی است و می‌دانیم که چون 3^x همواره مثبت است پس قدر مطلق اثری روی آن ندارد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود حداکثر جواب یک ریشه خواهد بود.



۲) رسم نمودار $y = a^x$ $(۰ < a < ۱)$:

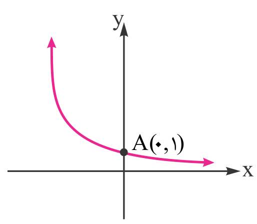
اگر فرض کنیم $a = \frac{۱}{۲}$ باشد، نمودار $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را به کمک نقطه یابی در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	...
y	...	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	...



نتایج مهم به‌دست آمده

۱) نمودار کلی توابع $f(x) = a^x$ با شرط $(۰ < a < ۱)$ به‌صورت مقابل است:



۲) این تابع همواره دارای عرض از مبدأ ۱ است.

۳) این تابع فاقد طول از مبدأ است و محور xها را قطع نمی‌کند، چون توانی از a با شرط $(۰ < a < ۱)$ وجود ندارد که برابر صفر شود.

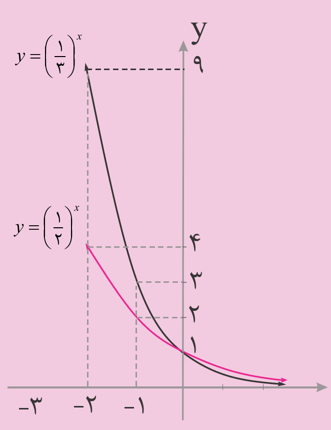
۴) این تابع یک به یک است، چون هر خط موازی محور x ها، آن را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.

۵) این تابع در $\mathbb{R}$ وارون پذیر است چون یک به یک است.

۶) از چپ به راست نزولی است چون با افزایش مقادیر x، مقادیر y مربوط به آن کاهش می‌یابد.

۷) دامنه این تابع اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ و برد آن $(۰, +\infty)$ است.

برای بررسی میزان رشد توابع نمایی و وضعیت قرارگیری توابع نمایی در دستگاه مختصات، نمودار توابع $f(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ و $f(x) = \left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده با هم مقایسه می‌کنیم.



x	...	-۲	-۱	۰	۱	۲	...
$\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$	...	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	...
$\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$	...	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$	...

نتیجه مهم:

اگر $x>۰$ باشد، نمودار $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ بالاتر از $\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ است، $\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^x > \left(\frac{۱}{۳}\right)^x\right)$ و اگر $x<۰$ باشد،نمودار $\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ بالاتر از نمودار $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ است، $\left(\left(\frac{۱}{۳}\right)^x > \left(\frac{۱}{۲}\right)^x\right)$.

به عبارت دیگر در تابع $f(x)=a^x$ با شرط $(۰<a<۱)$ اگر عدد a بزرگ‌ترشود، رشد تابع به توان‌های مثبت بیشتر شده و در نتیجه نمودار آن بالاتر قرار می‌گیرد و در توان‌های منفی رشد تابع کمتر شده و در نتیجه نمودار آن پایین‌تر قرار می‌گیرد.

بیان ریاضی: در توابع $y=a^x$ و $y=b^x$ باشرط $(۰<a<b<۱)$ داریم:

۱) $x>۰ \Rightarrow b^x > a^x$

۲) $x<۰ \Rightarrow a^x > b^x$

نکته: برای مقایسه رشد یا نزول توابع نمایی با پایه های متفاوت از نکات گفته شده درباره نمودار های $f(x)=a^x\,(a>۱), f(x)=a^x\,(۰<a<۱)$ استفاده می‌کنیم. ولی اگر پایه‌ها یکسان باشند و یا قابلیت یکسان شدن را داشته باشند،می‌توان رشد یا نزول این توابع را به کمک رشد یا نزول توان های آن‌ها مقایسه کرد.

▼مثال ۱۱) تابع نمایی f باضابطه $f(x)=\left(\frac{۱-a}{۲a-۱}\right)^x$ به ازای چه مقادیری از a نزولی است؟

(صفحه ۱۰۱ کتاب درسی)

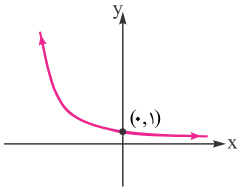
پاسخ شرط نزولی بودن تابع نمایی آن است که پایه اش بین صفر و یک باشد:

$$۰<\frac{۱-a}{۲a-۱}<۱ \Rightarrow \begin{cases} (۱)\quad \frac{۱-a}{۲a-۱}>۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}<a<۱ \quad (۱) \\ (۲)\quad \frac{۱-a}{۲a-۱}<۱ \Rightarrow \frac{۱-a}{۲a-۱}-۱<۰ \Rightarrow \frac{۱-a-۲a+۱}{۲a-۱}<۰ \Rightarrow a<\frac{۱}{۲} \text{ یا } a>\frac{۲}{۳} \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a \in \left(\frac{۲}{۳},۱\right)$$

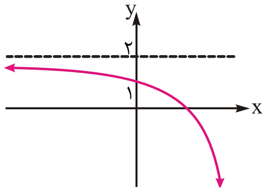
▼مثال ۱۲) اگر نمودار تابع $y=a^{-x}$ به‌صورت زیر باشد، برد تابع $y=-a^x+۲$ را به‌دست آورید.

(صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۱ کتاب درسی)



پاسخ می‌دانیم $y=a^{-x}=\left(\frac{۱}{a}\right)^x$ و چون تابع نزولی است، باید $۰<\frac{۱}{a}<۱$ باشد و در نتیجه $a>۱$ خواهد بود و تابع $y=-a^x+۲$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\Rightarrow \mathbb{R}=(-\infty,۲)$$



▼ **مثال ۱۳)** اگر در یک تابع نمایی $f(\circ)=5$ و $f(3)=40$ باشند $f(x)$ را به دست آورید:

(صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ کتاب درسی)

پاسخ

$$(1)\ f(\circ)=ka^{\circ}=5\Rightarrow k=5$$
$$(2)\ f(3)=40\Rightarrow ka^{3}=40\Rightarrow 5a^{3}=40\Rightarrow a^{3}=8\Rightarrow a=2$$
$$f(x)=5\times 2^{x}$$

▼ **مثال ۱۴)** در یک آزمایش مشاهده شده است که جرم یک باکتری در هر لحظه از رابطه $A_t=A_\circ.a^t$ به دست می‌آید که A جرم اولیه و A_t جرم باکتری پس از t ساعت می‌باشد. اگر بدانیم جرم باکتری پس از ۳ ساعت ۷۲۹ برابر جرم اولیه اش می‌شود، a کدام است؟

(صفحه ۹۹ کتاب درسی)

پاسخ

$$t=3\Rightarrow A_3=A_\circ a^{3}=729A_\circ\Rightarrow a^{3}=729\Rightarrow a=9$$

▼ **مثال ۱۵)** در تابع $f(x)=ab^{x}\ (b>\circ)$ داریم $f(-2)=\frac{3}{32}$ و $f(\circ)=\frac{3}{2}$، مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

(صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ کتاب درسی- تجربی ۹۱)

پاسخ

$$(1)\ f(\circ)=\frac{3}{2}\Rightarrow a.b^{\circ}=a=\frac{3}{2}$$
$$(2)\ f(-2)=\frac{3}{32}\Rightarrow a.b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2}\times b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow b=4\Rightarrow f(x)=(\frac{3}{2})(4)^{x}$$
$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}} f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times 8=12$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ **مثال ۱۶)** اگر نمودار تابع $f(x)=ab^{x}-1$ از دو نقطه‌ی $A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $B(1,11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

(صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ کتاب درسی- تجربی۹۳)

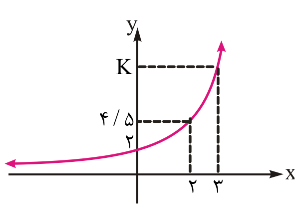
۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ

$$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\Rightarrow a(b)^{-\frac{1}{2}}-1=\frac{1}{2}\Rightarrow a(b)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}\Rightarrow f(x)=3(4)^{x}-1\Rightarrow f(-1)=-\frac{1}{4}$$
$$f(1)=a(b)^{1}-1=11\Rightarrow a(b)=12$$

▼ **مثال ۱۷)** اگر نمودار تابع نمایی $f(x)=mA^{x}$ به‌صورت زیر باشد، K را محاسبه کنید.

(صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ کتاب درسی)



پاسخ

$$f(۰)=۲\Rightarrow m(A)^{۰}=m=۲\Rightarrow f(۲)=۲\times A^{۲}=۴/۵\Rightarrow A^{۲}=۲/۲۵\Rightarrow A=۱/۵$$

$$f(x)=۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^{x}\Rightarrow K=f(۳)=۲\left(\frac{۲۷}{۸}\right)=\frac{۲۷}{۴}=۶/۷۵$$

قوانین اعداد توان‌دار

(۱) $a^{۰}=۱$	(۲) $a^m\times a^n=a^{m+n}$	(۳) $a^m\times b^m=(ab)^m$
(۴) $a^{۱}=a$	(۵) $\frac{a^m}{a^n}=(a)^{m-n}$	(۶) $\frac{a^m}{b^m}=(\frac{a}{b})^m$
(۷) $(a^m)^n=a^{mn}$	(۸) $a^{-m}=\frac{۱}{a^m}$	(۹) $a^m\div b^n=\frac{a^m}{b^n}$

نکته:

۱) توان فرد علامت عدد یا عبارت را حفظ می‌کند ولی توان زوج همواره خروجی‌اش دارای علامت مثبت است:

$(۱)\ (\pm a)^{۲k}=+a^{۲k}$

$(۲)\ (\pm a)^{۲k+۱}=\pm a^{۲k+۱}$

۲) حاصل $(a^m)^n$ با حاصل a^{mn} برابر است؛ پس: $(a^m)^n\neq a^{m^n}$ و $(a^m)^n=(a^n)^m$

۳) برای جمع یا تفریق اعداد توانی، قوانین خاصی وجود ندارد.

▼مثال ۱۸) حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

(صفحه ۹۸ کتاب درسی)

الف) $(۲/۵)^{۷}\times(\frac{۵}{۲})^{۳}$

ب) $\frac{۱}{۲۵}\times(\frac{۵}{۸})^{۱۱}\times ۸^{۱۱}$

پ) $۲^{۸}\times ۶^{۸}\times(\frac{۲}{۳})^{۸}$

ت) $(\frac{۳}{۴})^{۷}\div(۰/۲۵)^{۱۰}$

پاسخ

الف) $(۲/۵)^{۷}\times\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳}=\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۷}\times\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳}=\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۱۰}=(۲/۵)^{۱۰}$

ب) $۸^{۱۱}\times(\frac{۵}{۸})^{۱۱}\times\frac{۱}{۲۵}=۸^{۱۱}\times\frac{۵^{۱۱}}{۸^{۱۱}}\times\frac{۱}{۵^{۲}}=۵^{۹}$

پ) $(\frac{۲}{۳})^{۸}\times ۶^{۸}\times ۲^{۸}=\frac{۲^{۸}}{۳^{۸}}\times ۲^{۸}\times ۳^{۸}\times ۲^{۸}=۲^{۲۴}$

ت) $(۰/۲۵)^{۱۰}\div\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۷}=\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۰}\div\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۷}=\frac{۱}{۴^{۱۰}}\times\frac{۴^{۷}}{۳^{۷}}=\frac{۱}{۴^{۳}\times ۳^{۷}}$

▼مثال ۱۹) اگر $۱۰ = ۲^x$ باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

(صفحه ۹۸ کتاب درسی)

الف) $۱۶^{x-۱}$ ب) $۴^x + ۸^x$ پ) $(۲^x - ۸)^x + ۲^{۲x}$

پاسخ

(الف) $۱۶^{x-۱} = (۲^۴)^{x-۱} = ۲^{۴x-۴} = ۲^{۴x} \times ۲^{-۴} = (۲^x)^۴ \times ۲^{-۴} = (۱۰)^۴ \times ۲^{-۴} = \frac{۱۰^۴}{۱۶}$

(ب) $۴^x + ۸^x = (۲^۲)^x + (۲^۳)^x = (۲^x)^۲ + (۲^x)^۳ = ۱۰^۲ + ۱۰^۳ = ۱۱۰۰$

(پ) $(۲^x - ۸)^x + ۲^{۲x} = (۱۰ - ۸)^x + (۲^x)^۲ = ۲^x + (۱۰)^۲ = ۱۰ + ۱۰^۲ = ۱۱۰$

▼مثال ۲۰) اگر $۱۰ = ۵^x$ باشد، حاصل عبارت $\left[((۵^x - ۵)^x - ۵)^x - ۵\right]^x$ را به‌دست آورید.

(صفحه ۹۸ کتاب درسی)

پاسخ

$$۵^x - ۵ = ۱۰ - ۵ = ۵ \Rightarrow (۵^x - ۵)^x = ۵^x = ۱۰ \Rightarrow (۱۰ - ۵)^x = ۵^x = ۱۰ \Rightarrow \left[۱۰ - ۵\right]^x = ۵^x = ۱۰$$

▼مثال ۲۱) اگر $\frac{۹^{x+y}}{۳^{۵y}} = ۲۴۳$ برقرار باشد، رابطه بین x و y را به‌دست آورید.

(صفحه ۹۸ کتاب درسی)

پاسخ

$$\frac{۹^{x+y}}{۳^{۵y}} = ۲۴۳ \Rightarrow \frac{(۳^۲)^{x+y}}{۳^{۵y}} = ۲۴۳ \Rightarrow \frac{۳^{(۲x+۲y)}}{۳^{۵y}} = ۲۴۳ \Rightarrow ۳^{۲x-۳y} = ۳^۵ \Rightarrow ۲x - ۳y = ۵$$

▼مثال ۲۲) اگر $\frac{۴^x}{۲^{x+y}} = ۸$ برقرار باشد، رابطه بین x و y را به‌دست آورید.

(صفحه ۹۸ کتاب درسی)

پاسخ

$$\frac{۴^x}{۲^{x+y}} = ۸ \Rightarrow \frac{(۲^۲)^x}{۲^{x+y}} = \frac{۲^{(۲x)}}{۲^{x+y}} = ۸ \Rightarrow ۲^{x-y} = ۸ = ۲^۳ \Rightarrow x - y = ۳$$

▼مثال ۲۳) اعداد زیر را از کمترین به بیشترین مقدار مرتب کنید.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۹۸- صفحه ۹۸ کتاب درسی)

الف) $۲^{-۱},\ ۲^۵,\ ۲^{\frac{۵}{۲}},\ ۲^{\frac{۳}{۲}}$

ب) $۲^{-۰/۳}\ ۲^{۰/۳},\ ۲^{۰/۸},\ ۲^۰$

پاسخ

(الف) $\Rightarrow ۲^۵ > ۲^{\frac{۵}{۲}} > ۲^{\frac{۳}{۲}} > ۲^{-۱}$

(ب) $\Rightarrow ۲^{۰/۸} > ۲^{۰/۳} > ۲^۰ > ۲^{-۰/۳}$

معادلات نمایی

در معادلات نمایی پارامتر مجهول و یا عبارتی بر حسب آن در توان دیده می‌شود. برای حل راحت‌تر این معادلات آن‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

حالت اول: معادلاتی که درآن‌ها پس از ساده سازی در دو طرف تساوی دو عبارت نمایی هم پایه ایجاد می‌شوند ($a^{f(x)}=a^{g(x)}$) که چون پایه‌ها برابر هستند با برابر قرار دادن توان‌ها مقدار مجهول به‌دست خواهد آمد.

$a^{f(x)}=a^{g(x)}$ پایه ها برابر، پس توان ها برابر $\Rightarrow f(x)=g(x)$

حالت دوم: معادلاتی که در آن ها پس از ساده سازی در یک طرف تساوی یک عبارت نمایی و در طرف دیگر عددی ثابت قرار دارد ($a^{f(x)}=b$) که برای حل آن نیاز به استفاده از قوانین لگاریتم‌ها داریم که در قسمت لگاریتم‌ها به آن اشاره می‌شود:

$a^{f(x)}=b \Rightarrow$ نیازمند استفاده از قوانین لگاریتم‌ها

نکته: اگر در معادلات نمایی پس از ساده سازی به یک تساوی دو عبارت نمایی با پایه‌های مختلف و توان‌های مجهول متفاوت برسیم و پایه‌ها قابلیت تبدیل شدن به یکدیگر را نداشته باشند ($a^u=b^t$) حتما باید توان‌ها هم‌زمان صفر شوند.

$a^u=b^t \Rightarrow$ **پایه‌ها و توان‌ها نابرابر و مختلف** $u=t=\circ$

مثال ۲۴) تعداد نقاط مشترک دو تابع $f(x)=۲(\frac{۱}{۲})^{۲x+۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{۴}(۴)^{۱-x}$ را تعیین کنید.

(صفحه‌های ۹۸، ۱۰۳ و ۱۰۴کتاب درسی)

پاسخ

تعداد نقاط مشترک از برابری دو تابع و به‌دست آوردن ریشه‌ها نتیجه می‌شود.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow ۲(\frac{۱}{۲})^{۲x+۱}=\frac{۱}{۴}(۴)^{۱-x}\Rightarrow (۲)(۲)^{-۲x-۱}=۴^{-۱}(۴)^{۱-x}\Rightarrow ۲^{-۲x}=۴^{-x}$$

$\Rightarrow ۲^{-۲x}=۲^{-۲x}\Rightarrow -۲x=-۲x\Rightarrow$ *دو نمودار کاملا منطبق بوده و بی شمار نقطه مشترک دارند.*

مثال ۲۵) فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی نمودارهای دو تابع $y=۴^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x-۳}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

(صفحه‌های ۱۰۳ و ۱۰۴ کتاب درسی- سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۷۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۷}$ ۳) $\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۳۷}$

پاسخ

$$\begin{cases} y=۴^x \\ y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x-۳} \end{cases}\Rightarrow ۴^x=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x-۳}$$

$$\Rightarrow ۲^{۲x}=۲^{-۲x+۳}$$

$$\Rightarrow ۲x=-۲x+۳$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

و از آنجا $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{4}}=y$ ، فاصله‌ی نقطه‌ی $\left(\frac{3}{4},\sqrt{8}\right)$ از مبدأ برابر است با:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\ \overset{x=\frac{3}{4},\ y=\sqrt{8}}{=\!=\!=\!=}\ \sqrt{\frac{9}{16}+8}=\frac{1}{4}\sqrt{137}$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼مثال ۲۶) نمودارهای دو تابع $g(x)=(\frac{1}{9})^x$ و $f(x)=3^{ax+b}$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، اگر $f(2)=\frac{1}{3}$ باشد، $f^{-1}(27)$ را به‌دست آورید.

(صفحه‌های ۱۰۳ و ۱۰۴ کتاب درسی- ریاضی ۹۵)

پاسخ

$$f(-1)=g(-1)\Rightarrow 3^{-a+b}=(\frac{1}{9})^{-1}=9^{+1}=3^2\Rightarrow b-a=2\qquad (1)$$

$$f(2)=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^{2a+b}=\frac{1}{3}=3^{-1}\Rightarrow 2a+b=-1\qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a=-1,b=1\Rightarrow f(x)=3^{-x+1}$$

$$f^{-1}(27)=A\to f(A)=27\Rightarrow 3^{-A+1}=27=3^3\Rightarrow A=-2$$

▼مثال ۲۷) معادلات زیر را حل کنید.

(صفحه‌های ۱۰۳ و ۱۰۴ کتاب درسی- مشابه مثال صفحه ۱۰۳)

الف) $3^{2x-3}=81$

ب) $4^{2x-1}=8^{x+1}$

پ) $5^{3n-1}=125^{2n+1}$

ت) $2^{3n-2}=\frac{1}{32^2}$

ث) $9^{3y-3}=27^{2y+1}$

ج) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3}$

چ) $(0/2)^x=125$

ح) $3^x+3^{x+1}=36$

خ) $\frac{27^x\times 9^{x-2}}{(\frac{1}{3})^{1-x}\times 6^x}=2^{-x}$

د) $(3-2\sqrt{2})^{x^2}=(3+2\sqrt{2})^{-3x}$

ذ) $5^{2x-4}=6^{3x-3}$

پاسخ

الف) $3^{2x-3}=81\Rightarrow 3^{2x-3}=3^4\Rightarrow 2x-3=4\Rightarrow x=\frac{7}{2}$

ب) $4^{2x-1}=8^{x+1}\Rightarrow (2^2)^{2x-1}=(2^3)^{x+1}\Rightarrow 2^{4x-2}=2^{3x+3}\Rightarrow 4x-2=3x+3\Rightarrow x=5$

پ) $5^{3n-1}=125^{2n+1}\Rightarrow 5^{3n-1}=(5^3)^{2n+1}\Rightarrow 3n-1=6n+3\Rightarrow 3n=-4\Rightarrow n=\frac{-4}{3}$

ت) $2^{3n-2}=(2^{-5})^2\Rightarrow 2^{3n-2}=2^{-10}\Rightarrow 3n-2=-10\Rightarrow n=\frac{-8}{3}$

ث) $9^{3y-3}=27^{2y+1}\Rightarrow (3^2)^{3y-3}=(3^3)^{2y+1}\Rightarrow 3^{6y-6}=3^{6y+3}$

$\Rightarrow 6y-6=6y+3\Rightarrow -6=3$ فاقد جواب

ج) $۴^{۳x+۲}=\frac{۱}{۶۴^{۳}} \Rightarrow (۲^{۲})^{۳x+۲}=(۲^{-۶})^{۳}\Rightarrow ۲^{۶x+۴}=۲^{-۱۸}\Rightarrow ۶x+۴=-۱۸\Rightarrow x=\frac{-۱۱}{۳}$

چ) $(۰/۲)^x=۱۲۵\Rightarrow(\frac{۱}{۵})^x=۱۲۵\Rightarrow ۵^{-x}=۵^{۳}\Rightarrow x=-۳$

ح) $۳^x+۳^{x+۱}=۳۶\Rightarrow ۳^x+۳^x\times۳=۳۶\Rightarrow ۳^x(۱+۳)=۳۶\Rightarrow ۴\times۳^x=۳۶\Rightarrow ۳^x=۹\Rightarrow x=۲$

خ) $\frac{۲۷^x\times۹^{x-۲}}{(\frac{۱}{۳})^{۱-x}\times۶^x}=۲^{-x}\Rightarrow\frac{۳^{۳x}\times۳^{۲x-۴}}{۳^{x-۱}\times۳^x\times۲^x}=\frac{۳^{۵x-۴}}{۳^{۲x-۱}\times۲^x}=۲^{-x}\Rightarrow\frac{۳^{۳x-۳}}{۲^x}=۲^{-x}\times۳^{۳x-۳}=۲^{-x}\Rightarrow ۳^{۳x-۳}=۱$

$۳x-۳=۰\Rightarrow x=۱$

د) می‌دانیم $\Rightarrow (۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})=۱\Rightarrow(\frac{۱}{۳+۲\sqrt{۲}})^{x^۲}=(۳+۲\sqrt{۲})^{-۳x}\Rightarrow -x^۲=-۳x\Rightarrow \begin{cases}x=۰\\x=۳\end{cases}$

ذ) $۵^{۲x-۴}=۶^{۳y-۳}\Rightarrow ۲x-۴=۳y-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\y=۱\end{cases}$

۲ تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

درک شهودی لگاریتم و منطق آن

در ریاضیات پاسخ این سؤال که به عنوان مثال «۲۵توان چندم عدد۵ است ؟» یا «عدد۸۱ توان چندم عدد ۳ است ؟» را به کمک لگاریتم تعریف می‌کنند و برای مورد اول می‌نویسند $\log_{۵} ۲۵=۲$ وبرای مورد دوم می‌نویسند $\log_{۳} ۸۱=۴$ که آن‌ها را ما به‌ترتیب لگاریتم ۲۵ در مبنای ۵ و لگاریتم ۸۱ در مبنای ۳ می‌خوانیم.

▼مثال ۲۸) حاصل لگاریتم زیر را به کمک منطق آن به‌دست آورید.

(مشابه تهران- هماهنگ ۸۸ - ۳۸ بار تکرار - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۱ کتاب درسی)

الف) $\log_{۲} ۱۲۸$ **ب)** $\log_{۷} ۴۹$ **پ)** $\log_{۱۰} ۱۰۰$

پاسخ

الف) $\log_{۲} ۱۲۸=\log_{۲} ۲^{۷}=۷$ ب) $\log_{۷} ۴۹=\log_{۷} ۷^{۲}=۲$ پ) $\log_{۱۰} ۱۰۰=\log_{۱۰} ۱۰^{۲}=۲$

تعریف لگاریتم

تابع لگاریتم وارون یک تابع نمایی است. اگر فرض کنیم $a^{b}=c$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد $(a>۰, a\neq ۱)$ دراین صورت به عدد b،لگاریتم عدد c درمبنای a گفته می‌شود واین طور می‌نویسیم $\log_{a} c=b$ و می‌خوانیم لگاریتم cدر مبنا(پایه)a برابر b است :

$a^{b}=c \Leftrightarrow \log_{a} c=b$ ؛ $(c>۰)$ و $(a>۰)$ و $(a\neq ۱)$

نکته: چون در عبارت a^b پایه a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است و حاصل a^b نیز یک عدد مثبت است، پس عدد c هم باید مثبت باشد.

مثال ۲۹) رابطه های نمایی داده شده را به صورت لگاریتمی بنویسید.

(صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰ کتاب درسی)

الف) $3^4 = 81$ ب) $10^{-3} = 0/001$ پ) $5^{-2} = \frac{1}{25}$ ت) $2^0 = 1$

پاسخ

الف) $3^4 = 81 \Rightarrow 4 = \log_3 81$ ب) $10^{-3} = 0/001 \Rightarrow -3 = \log_{10} 0/001$

پ) $5^{-2} = \frac{1}{25} \Rightarrow -2 = \log_5 \frac{1}{25}$ ت) $2^0 = 1 \Rightarrow 0 = \log_2 1$

مثال ۳۰) رابطه‌های لگاریتمی داده شده را به صورت نمایی بنوسید.

(صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰ کتاب درسی)

الف) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ ب) $\log_{10} 100 = 2$ پ) $\log_{64} \frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$ ت) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

پاسخ

الف) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \Rightarrow 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ ب) $\log_{10} 100 = 2 \Rightarrow 100 = 10^2$

پ) $\log_{64} \frac{1}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} = (64)^{-\frac{1}{2}}$ ت) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5} \Rightarrow 2 = (32)^{\frac{1}{5}}$

مثال ۳۱) مقدار x را چنان تعیین کنید که رابطه $\log_4 32 = 2x - 1$ بر قرار باشد.

(صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰ کتاب درسی)

پاسخ

$$32 = 4^{2x-1} \Rightarrow 2^5 = (2^2)^{2x-1} \Rightarrow 2^5 = 2^{4x-2} \Rightarrow 5 = 4x - 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7}{4}}$$

مثال ۳۲) اگر $\log_{16} N = \frac{3}{2}$، N را بدست آورید.

(صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۰ کتاب درسی- مشابه یزد- جواد الائمه ۹۰)

پاسخ

با توجه به تعریف لگاریتم داریم:

$$\log_{16} N = \frac{3}{2} \Rightarrow N = 16^{\frac{3}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} = 2^6 = 64$$

مثال ۳۳) لگاریتم x در مبنای ۹ برابر $\frac{3}{2}$ است، $\sqrt[3]{x}$ را محاسبه کنید.

(صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰ کتاب درسی)

پاسخ

$$\log_{۹} x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=۹^{\frac{۳}{۲}}\xrightarrow{\text{به توان } \frac{۱}{۳}}(x)^{\frac{۱}{۳}}=\left(۹^{\frac{۳}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow \sqrt[۳]{x}=۹^{\frac{۱}{۲}}=۳$$

▼مثال ۳۴) اگر $\log_{۱۲} y=\frac{۱}{۲}$ و $\log_{۲۷} x=\frac{۱}{۲}$ باشد، $x+y$ را محاسبه کنید.

(صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰ کتاب درسی)

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l}\log_{۲۷} x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲۷^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳}\\ \log_{۱۲} y=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۱۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{x+y=۵\sqrt{۳}}$$

▼مثال ۳۵) اگر $y-x=۶$ و $\log_{x} y=۲$ باشد، x را محاسبه کنید.

(صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰ کتاب درسی)

پاسخ

$$\log_{x} y=۲\Rightarrow \boxed{y=x^{۲}}\quad (۱)$$

$$y-x=۶\xrightarrow{(۱)}x^{۲}-x=۶$$

$$\Rightarrow x^{۲}-x-۶=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳\Rightarrow \boxed{y=۹}\\ x=-۲\Rightarrow \text{نادرست است مبنای لگاریتم باید بزرگتر از ۰ باشد.}\end{cases}$$

تابع لگاریتمی

مشاهده شد که تابع نمایی $y=a^{x}$ ($a>۰, a\neq ۱$) در $\mathbb{R}$ یک به یک و وارون پذیر است. معکوس این تابع همان تابع لگاریتمی است که به‌صورت $y=\log_{a} x$ نمایش می‌دهیم.

$$y=a^{x}\xrightarrow[\text{تعریف لگاریتم به‌دست می‌آید}]{x \text{ برحسب } y \text{ با}}x=\log_{a} y\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}}y=\log_{a} x$$

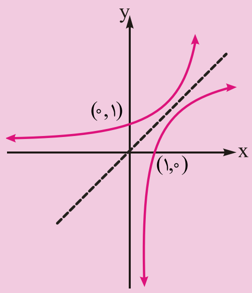
در نتیجه تابع لگاریتم به عنوان معکوس تابع نمایی تعریف می‌شود و مبنای آن عدد a همچنان باید دارای شرایط $a>۰, a\neq ۱$ بوده و x هم مثبت باشد.

رسم توابع لگاریتمی

چون تابع لگاریتم معکوس تابع نمایی است ، بنابراین نمودار آن قرینه نمودار $y=a^{x}$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y=x$ می باشد ،که همانند تابع نمایی، نمودار آن در دو حالت $a>۰$ (صعودی) و $۰<a<۱$ (نزولی) مورد بررسی قرار می‌دهیم :

۱) حالت اول : اگر $a>۱$ باشد :

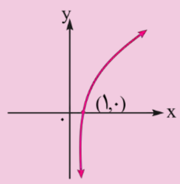
با توجه به نمودار رسم شده نکات زیر بدست می‌آید :



۱)این تابع دارای عرض از مبدأ نبوده چرا که لگاریتم عدد صفر در هیچ مبنایی تعریف نمی‌شود.

۲) این تابع دارای طول از مبدأ ۱ است.

۳) این تابع در $\mathbb{R}$ یک به یک است ، چرا که هر خط موازی محور x ها آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه وارون پذیر است.

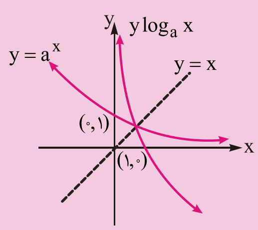


۴) همه توابع به فرم $y=\log_a x$ $(a>1)$ دارای نمودار به شکل مقابل هستند:

۵) این تابع از چپ به راست صعودی است، چرا که با افزایش مقادیر x، مقادیر y نیز افزایش می‌یابد.

۶) $\boxed{R_f=\mathbb{R}}$ و $\boxed{D_f=(0+\infty)}$

حالت دوم : اگر $0<a<1$:

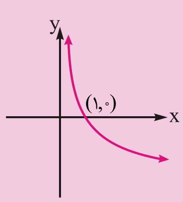


با توجه به نمودار نتایج زیر بدست آید:

۱) این تابع فاقد عرض از مبدأ است.

۲) این تابع دارای طول از مبدأ ۱ است.

۳) این تابع در $\mathbb{R}$ یک به یک است ، چرا که هر خط موازی محورx ها آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه وارون پذیر است.



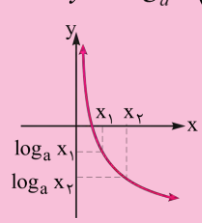
۴) همه توابع به فرم $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ دارای نمودار به شکل مقابل هستند

۵) این تابع از چپ به راست نزولی است ، چرا که با افزایش مقادیر x ، مقادیر y کاهش می‌یابند.

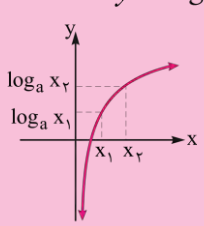
۶) $\boxed{D_f=(0+\infty)}$ و $\boxed{R_f=\mathbb{R}}$

نکته: از صعودی و نزولی بودن توابع لگاریتمی می‌توان به نتایج زیر رسید:

الف) $y=\log_a x\,(0<a<1)$



ب) $y=\log_a x\,(a>1)$



پ) $0<a<1: x_2>x_1 \Rightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$

ت) $a>1: x_2>x_1 \Rightarrow \log_a x_2>\log_a x_1$

نکته: در هر دو نمودار توابع لگاریتمی ، نمودارها هیچ گاه به خط $x=۰$ نمی‌رسند.

نکته: با توجه به آن که نمودارهای توابع لگاریتمی و نمایی نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند، اگر نقطه $A(a,b)$ روی تابع نمایی باشد ، نقطه $A'(b,a)$ روی تابع لگاریتمی وارون آن خواهد بود.

مثال ۳۶) نمودار توابع $f(x)=\log_۳ x$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۳}} x$ را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را تعیین کنید.

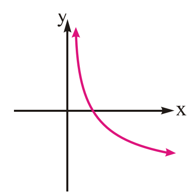
(مشابه تهران– علامه مجلسی– ۸۹ – (۳۸ بار تکرار) صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۸ کتاب درسی)

پاسخ

$g(x)=\log_{\frac{۱}{۳}} x$

$D_g=(۰,+\infty)$

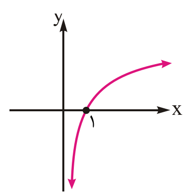
$R_g=\mathbb{R}$



$f(x)=\log_۳ x$

$D_f=(۰,+\infty)$

$R_f=\mathbb{R}$



مثال ۳۷) نمودار تابع $y=۱+\log_۵(x-۲)$ محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند ؟

(صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۸ کتاب درسی– مشابه کرج – قلم چی – ۹۰)

پاسخ

$$y=۰\Rightarrow ۱+\log_۵(x-۲)=۰\Rightarrow \log_۵(x-۲)=-۱\Rightarrow x-۲=۵^{-۱}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow \boxed{x=\frac{۱۱}{۵}}$$

مثال ۳۸) اگر ضابطه تابع f به صورت $f(x)=\log_a x$ و $f(۲۵)=۲$ باشد ، $f(\sqrt[۳]{۵})$ را محاسبه کنید.

(صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۸ کتاب درسی)

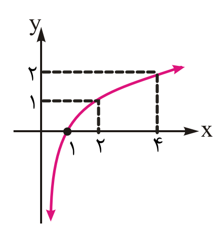
پاسخ

$$f(۲۵)=۲\Rightarrow \log_a ۲۵=۲\Rightarrow a^۲=۲۵\Rightarrow \boxed{a=۵}\Rightarrow f(x)=\log_۵ x\Rightarrow f(\sqrt[۳]{۵})=\log_۵^{۳}\sqrt{۵}=\frac{۱}{۳}$$

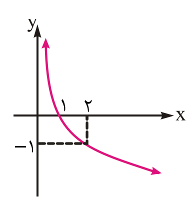
مثال ۳۹) اگر توابع زیر لگاریتمی باشند ، ضابطه آن‌ها را بنویسید.

(صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۸ کتاب درسی)

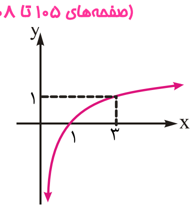
الف)



ب)



ج)



پاسخ

الف)

$$f(x)=\log_a x\Rightarrow f(۲)=۱\Rightarrow \log_a ۲=۱\Rightarrow \boxed{a=۲}\Rightarrow \boxed{f(x)=\log_۲ x}$$

ب) $f(x)=\log_a x \Rightarrow f(۲)=-۱ \Rightarrow \log_a ۲=-۱ \Rightarrow a^{-۱}=۲ \Rightarrow \boxed{a=\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \boxed{f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}} x}$

ج) $f(x)=\log_a x \Rightarrow f(۳)=۱ \Rightarrow \log_a ۳=۱ \Rightarrow \boxed{a=۳} \Rightarrow f(x)=\log_۳ x$

دامنه‌ی توابع لگاریتمی

می‌دانیم که در توابع لگاریتمی $y=\log_a x$ (a به دامنه ربطی ندارد و مجموعه ی x نام دامنه به خود می‌گیرد.) مبنا باید مثبت و مخالف یک باشد $(a>۰, a\neq ۱)$ و هم چنین لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود ، پس برای محاسبه دامنه توابع لگاریتمی باید سه شرط ۱) $x>۰$ ، ۲) $a>۰$ و $a\neq ۱$ هم‌زمان برقرار باشد. با این شکل نوشتن اشتباه است (چراکه یعنی مبنا هم می‌تواند یک تابع باشد که در این‌صورت تابع لگاریتمی (مثلاً $\log_{\sin x} x$) لگاریتمی نیست).

▼مثال ۴۰) دامنه توابع زیر را بیابید.

(صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۰ کتاب درسی)

الف) $y=\log_۵\left(\frac{۲x-۱}{۳}\right)$

$$\left.\begin{array}{ll} ۱)\ \frac{۲x-۱}{۳}>۰ \Rightarrow \boxed{x>\frac{۱}{۲}} & \\ ۲)\ ۵>۰ & \checkmark \\ ۳)\ ۵\neq ۱ & \checkmark \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{x>\frac{۱}{۲}}$$

ب) $y=\log_{(۲x-۲)}(x-۵)$

$$\left.\begin{array}{l} ۱)\ x-۵>۰ \Rightarrow \boxed{x>۵} \\ ۲)\ ۲x-۲>۰ \Rightarrow \boxed{x>۱} \\ ۳)\ ۲x-۲\neq ۱ \Rightarrow \boxed{x\neq \frac{۳}{۲}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{x>۵}$$

پ) $y=\log_{(x^۲-۹)}(x^۲-۴)$

$$\left.\begin{array}{l} ۱)\ x^۲-۴>۰ \Rightarrow |x|>۲ \Rightarrow \boxed{x>۲ \ \text{یا}\ x<-۲} \\ ۲)\ x^۲-۹>۰ \Rightarrow |x|>۳ \Rightarrow \boxed{x>۳ \ \text{یا}\ x<-۳} \\ ۳)\ x^۲-۹\neq ۱ \Rightarrow \boxed{x\neq \pm\sqrt{۱۰}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} (x>۳ \ \text{یا}\ x<-۳)-\left\{\pm\sqrt{۱۰}\right\}$$