

درس ۱: مجموع دنباله‌های حسابی و هندسی

**دنباله‌ی حسابی:** دنباله‌ای از اعداد که تفاضل دو جمله‌ی متوالی آن مقداری ثابت است. اگر  $t$  جمله‌ی اول و  $d$  قدرنسبت دنباله‌ی حسابی باشد، جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر است:

$$t_n = t + (n-1)d$$

**نکته:** اگر دو جمله‌ی دلخواه از دنباله‌ی حسابی را داشته باشیم، آن گاه داریم:

$$d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$$

**نکته:** اگر  $t_m$  و  $t_n$  و  $t_p$  و  $t_q$  جملات دنباله‌ی حسابی باشند به طوری که  $m + n = p + q$  باشد، آن گاه داریم:

$$t_m + t_n = t_p + t_q$$

**نکته:** برای ۳ عدد  $a$ ،  $b$  و  $c$ ،  $b$  را واسطه‌ی حسابی بین  $a$  و  $c$  گوئیم اگر:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی:

$$S_n = \frac{n}{2}(t + t_n)$$

با توجه به این که  $t_n = t + (n-1)d$  بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2t + (n-1)d)$$

**مثال:** در دنباله‌ی حسابی ... و  $-21$  و  $x$  و  $-27$ ، مجموع جملات منفی را به دست آورید.

$$\begin{cases} t_1 = -27 \\ t_3 = -21 \end{cases} \Rightarrow d = 3$$

**حل:** در دنباله‌ی حسابی ...،  $-21$ ،  $x$ ،  $-27$  داریم:

$$t_n = -27 + 3(n-1) < 0 \Rightarrow n < 10$$

حال تعداد جملات منفی این دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$S_9 = \frac{9}{2}(2t_1 + 8d) = \frac{9}{2}(-54 + 24) = -15 \times 9 = -135$$

این دنباله ۹ جمله‌ی منفی دارد.

**نکته:** در یک دنباله‌ی حسابی اگر  $S_n$  معلوم باشد، می‌توان جمله‌ی عمومی دنباله را محاسبه کرد.

$$t_n = S_n - S_{n-1}$$

**نکته:**  $S_n$  بر حسب  $n$  از درجه‌ی ۲ خواهد بود، بنابراین ضریب  $n^2$  نصف قدرنسبت خواهد شد.

**دنباله‌ی هندسی:** دنباله‌ای از اعداد که نسبت دو جمله متوالی آن مقداری ثابت است.

اگر  $t$  جمله‌ی اول و  $r$  قدرنسبت دنباله هندسی باشد، جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر است:

$$t_n = tr^{n-1}$$

**نکته:** اگر دو جمله‌ی دلخواه از دنباله‌ی هندسی را داشته باشیم، آن گاه داریم:

$$\frac{t_n}{t_m} = r^{n-m}$$

**نکته:** اگر  $t_m$  و  $t_n$  دو جمله از دنباله‌ی هندسی و  $t_p$  و  $t_q$  دو جمله‌ی دیگر از دنباله‌ی هندسی باشند به طوری که  $m + n = p + q$  باشد، آن گاه خواهیم داشت:

$$t_m \cdot t_n = t_p \cdot t_q$$

**نکته:** برای ۳ عدد  $a$ ،  $b$  و  $c$ ،  $b$  را واسطه‌ی هندسی بین  $a$  و  $c$  گوئیم اگر:

$$b^2 = a \cdot c$$

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی:

$$S_n = \frac{t(1-r^n)}{1-r}$$

مثال: دنباله هندسی  $\dots, \frac{1}{4}, x, 2$  غیر نزولی است، مجموع شش جمله اول آن را به دست آورید.

$$x^2 = 2 \times \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

حل:  $x = 2$  و  $\frac{1}{4}$  سه جمله اول دنباله هندسی است، بنابراین داریم:

$$(2, 1, \frac{1}{2}, \dots)$$

$x = 1$  غیر قابل قبول است زیرا در این صورت دنباله هندسی نزولی می شود.

$$S_6 = \frac{a_1(1-r^6)}{1-r} \xrightarrow[t=-\frac{1}{2}]{t_1=2} \frac{2(1-\frac{1}{64})}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{16}$$

پس  $x = -1$  قابل قبول است  $(2, -1, \frac{1}{2}, \dots)$  بنابراین داریم:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1+r^n$$

نکته:

حد مجموع جمله های یک دنباله هندسی:

همان طور که در قسمت قبل گفته شد، مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه  $S_n = \frac{t(1-r^n)}{1-r}$  به دست می آید. در

صورتی که  $|r| < 1$  باشد، در این صورت مجموع همه جملات دنباله (حد مجموع جمله های دنباله) برابر  $\frac{t}{1-r}$  می شود. در صورتی که

$|r| \geq 1$  باشد، حد مجموع جمله های دنباله بی نهایت خواهد شد.

مثال: حد مجموع جمله های دنباله هندسی  $\dots$  و  $-\frac{4}{3}$  و  $4$  و  $-12$  را محاسبه کنید.

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$$

حل: قدر نسبت دنباله هندسی برابر است با:

$$S = \frac{-12}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-12}{\frac{4}{3}} = -9$$

اما حد مجموع جملات برابر با  $S = \frac{t}{1-r}$  است، پس داریم:

توجه: در بعضی از تست ها، دنباله داده شده توسط سؤال، مجموع یا اختلاف دو یا چند دنباله هندسی است. در این صورت برای حل این گونه تست ها لازم است از روش دسته بندی استفاده کرد.

مثال: حاصل  $\dots + \frac{1}{64} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  را به دست آورید.

حل: از روش دسته بندی برای حل این سؤال استفاده می کنیم، بنابراین داریم:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

### سوالات تشریحی

#### مجموع جمله های دنباله حسابی

۱- اگر  $a_n = \frac{1-2n}{3}$  جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد، مجموع جملات آن را تا جمله بیستم بنویسید. کرج- شاهد شهید پناهی- ۹۰ (۲ بار تکرار)

۲- جمله پانزدهم یک دنباله حسابی ۳۴ و مجموع هشت جمله اول آن ۲۰ است. مجموع چهل جمله اول

آن را بیابید. کرج- غیر انتفاعی جامی- ۹۰ (۸ بار تکرار)

۳- از معادله  $(2+x) + (5+x) + \dots + (44+x) = 450$  مقدار  $x$  را به دست آورید. **بناب- تیزهوشان طباطبایی- ۹۰ (۳ بار تکرار)**

مجموع جمله‌های دنباله هندسه

۴- مجموع چند جمله‌ی اول از دنباله‌ی هندسی  $6, -12, 24, \dots$  برابر  $-126$  خواهد شد؟ **امتحان نهایی، خرداد ۹۰ (۷ بار تکرار)**

۵- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.  $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$  **اقلید- الزهراء- ۹۰ (۷ بار تکرار)**

سوالات تستی

مجموع جمله‌های دنباله حسابی

۶- در یک دنباله‌ی عددی جمله‌ی پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله‌ی ماقبل خود به اندازه‌ی  $\frac{1}{p}$  کم‌تر است. مجموع  $10$  جمله‌ی اول آن کدام است؟ **(سراسری تجربی- ۸۲)**

- (۱)  $22/5$  (۲)  $25$  (۳)  $27/5$  (۴)  $30$

۷- اعداد  $\dots, \frac{5}{y}, x, 1$ ، چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی عددی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶)**

- (۱)  $57$  (۲)  $62/5$  (۳)  $67/5$  (۴)  $68$

۸- در یک دنباله‌ی عددی، جمله‌ی  $n$ ام به صورت  $a_n = \frac{3}{2}n - 5$  است. مجموع  $15$  جمله‌ی اول این دنباله، کدام است؟ **(سراسری تجربی- ۸۹)**

- (۱)  $90$  (۲)  $105$  (۳)  $120$  (۴)  $135$

۹- مجموع هشت جمله‌ی اول از دنباله‌ی حسابی برابر ۲ و جمله‌ی یازدهم آن برابر  $10$  می‌باشد، قدر نسبت این دنباله کدام است؟ **(سراسری تجربی- ۷۹)**

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

۱۰- در یک دنباله‌ی عددی با جمله‌ی اول  $a$ ، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع  $20$  جمله‌ی اول چقدر افزوده خواهد شد؟ **(سراسری ریاضی- ۸۳)**

- (۱)  $160$  (۲)  $170$  (۳)  $180$  (۴)  $190$

۱۱- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد،  $\dots, (10, 9, 8, 7), (6, 5, 4), (3, 2), (1)$ . مجموع جملات در دسته‌ی بیستم، کدام است؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)**

- (۱)  $4010$  (۲)  $4020$  (۳)  $4030$  (۴)  $4040$

۱۲- مجموع  $5$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی برابر با  $10$ ، مجموع  $5$  جمله‌ی آخر آن  $145$  و مجموع همه‌ی جملات آن  $217$  است. تعداد جملات این دنباله کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی- ۹۳)**

- (۱)  $11$  (۲)  $14$  (۳)  $15$  (۴)  $13$

۱۳- بین دو عدد  $8$  و  $63$ ، تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند و تفاضل کوچکترین و بزرگترین آنها  $33$  است، مجموع کل جملات دنباله کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی- ۹۱)**

- (۱)  $142$  (۲)  $213$  (۳)  $284$  (۴)  $375$

۱۴- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات هفتم و بیست و سوم برابر  $20$  است. مجموع جملات دهم تا بیستم کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی- ۹۱)**

- (۱)  $110$  (۲)  $120$  (۳)  $130$  (۴)  $140$

۱۵- در دنباله‌های حسابی  $\begin{cases} A = 1, 5, 9, \dots \\ B = 3, 10, 17, \dots \end{cases}$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۰)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۳ (۴) ۳۵

۱۶- مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی  $S_n = an^2 + (a+b)n^2 + 2n$  به دست می‌آید. اگر جمله‌ی چهارم این دنباله برابر ۹ باشد،  $b$  کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{11}{7}$  (۴)  $\frac{5}{7}$

#### مجموع جمله‌های دنباله هندسی

۱۷- حاصل  $A = (1+x+x^2+\dots+x^A)(1-x+x^2-\dots+x^A)$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۲)

- (۱) ۵۰۷ (۲) ۵۱۱ (۳) ۵۱۲ (۴) ۵۱۶

۱۸- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی به صورت  $\dots, b, 9, a, 4$ ، مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

- (۱)  $81\frac{3}{8}$  (۲)  $81\frac{7}{8}$  (۳)  $82\frac{3}{8}$  (۴)  $83\frac{1}{8}$

۱۹- حاصل عبارت  $\frac{a^{11} + a^{10} + a^9 + \dots + a + 1}{a^9 + a^6 + a^3 + 1}$ ، به ازای  $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۳)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۰- بین دو عدد ۲ و  $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله‌ی هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

- (۱)  $30(2 + \sqrt{2})$  (۲)  $48\sqrt{2}$  (۳)  $30(\sqrt{2} + 1)$  (۴)  $36(\sqrt{2} + 1)$

۲۱- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع ده جمله‌ی اول  $(4\sqrt{2} + 1)$  برابر مجموع ۵ جمله‌ی اول است. در این دنباله، مجموع ۸ جمله‌ی اول چند برابر مجموع چهار جمله‌ی اول است؟ (آزاد ریاضی عصر - ۸۹)

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) ۱۷

#### حد مجموع جمله‌های دنباله هندسی

۲۲- حد مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی  $\dots$  و  $-\frac{4}{3}$  و ۴ و  $-12$  کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۷۱)

- (۱) -۳ (۲) -۶ (۳) -۹ (۴) -۱۸

۲۳- حاصل  $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \frac{1}{729} + \dots$  کدام است؟ (آزاد ریاضی صبح - ۸۳)

- (۱)  $\frac{12}{27}$  (۲)  $\frac{12}{26}$  (۳)  $\frac{11}{26}$  (۴)  $\frac{11}{27}$

۲۴- از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۲۱ متر توپی را رها می‌کنیم. این توپ پس از هر بار زمین خوردن به اندازه‌ی  $\frac{2}{3}$  ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود،

کل مسافتی که توپ از لحظه‌ی رهاشدن تا ایستادن طی می‌کند، چند متر است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۳)

- (۱) ۱۲۶ (۲)  $\frac{350}{3}$  (۳) ۱۰۵ (۴)  $\frac{325}{3}$

۲۵- حد مجموع مربعات جملات یک دنباله‌ی هندسی غیرثابت، متناهی و برابر با حد مجموع مکعبات این دنباله است. جمله‌ی اول دنباله به کدام بازه‌ی زیر متعلق است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۰)

- (۱)  $(-4, 0)$  (۲)  $(0, 1)$  (۳)  $(1, +\infty)$  (۴)  $(-\infty, -4)$

درس ۲: معادلات درجه‌ی دوم

**تابع درجه‌ی دوم:** صورت کلی این تابع به شکل  $f(x) = ax^2 + bx + c$  می‌باشد که در آن  $a \neq 0$  و  $a, b, c \in \mathbb{R}$  منظور از ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم  $x$  هایی است که  $f(x) = 0$  شود.

**حل معادلات درجه‌ی دوم:** متداول‌ترین روش‌های حل معادله درجه‌ی دوم روش تجزیه، مربع کامل، فاکتورگیری و استفاده از فرمول کلی است.

**مثال:** معادلات زیر را به روش نوشته شده حل کنید.

(۱)  $x^2 - 9x + 20 = 0$  (تجزیه)      (۲)  $x^2 - 3x = 0$  (فاکتورگیری)      (۳)  $x^2 - 4x - 3 = 0$  (مربع کامل)

**حل:**

(۱)  $x^2 - 9x + 20 = 0 \rightarrow (x-4)(x-5) = 0 \rightarrow x = 4$  یا  $x = 5$

(۲)  $x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow x = 0$  یا  $x = 3$

(۳)  $x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow [(x-2)^2 - 4] - 3 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 7 \rightarrow x = 2 + \sqrt{7}$  یا  $x = 2 - \sqrt{7}$

**فرمول کلی حل معادله درجه‌ی دوم:** به طور کلی برای حل معادله درجه دوم به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\Delta > 0)$$

که در آن  $\Delta = b^2 - 4ac$  است.

**روابط بین ضرایب معادله‌ی درجه دوم و ریشه‌های آن:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، می‌توان نشان داد که:

(۱)  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$  , (۲)  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$  , (۳)  $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

به عنوان مثال برای معادله‌ی  $2x^2 + 5x - 8 = 0$  می‌توان گفت:

مجموع ریشه‌ها  $= \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2}$

حاصلضرب ریشه‌ها  $= \frac{c}{a} = \frac{-8}{2} = -4$

قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها  $= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{5^2 - 4(-8)(2)}}{2} = \frac{\sqrt{89}}{2}$

**تذکر:** روابط فوق زمانی برقرار هستند که  $\Delta \geq 0$  باشد به دلیل این که زمانی که  $\Delta < 0$  باشد، اساساً معادله ریشه‌ای ندارد که بخواهیم مجموع و یا حاصلضرب آن‌ها را به دست آوریم.

تشکیل معادله با استفاده از  $S$  و  $P$ : اگر  $S$  و  $P$  را بصورت  $S = \alpha + \beta$  و  $P = \alpha\beta$  تعریف کنیم، در این صورت معادله‌ی  $x^2 - Sx + P = 0$  ریشه‌هایش برابر  $\alpha$  و  $\beta$  خواهد شد. بنابراین با داشتن مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها می‌توان معادله‌ی درجه‌ی دوم را تشکیل داد.

**نکته:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی به فرم  $x^2 - Sx + P = 0$  باشد، می‌توان گفت:

I)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

II)  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$

**مثال:** معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش  $2 + \sqrt{4-a}$  و  $2 - \sqrt{4-a}$  باشد، به دست آورید.

**حل:**

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 4 \\ P = x_1 \cdot x_2 = (2 + \sqrt{4-a})(2 - \sqrt{4-a}) = a \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + a = 0$

تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم: برای معادله‌ی درجه‌ی دوم به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  داریم:

معادله دارای دو ریشه حقیقی $\Delta > 0$	}	$\frac{c}{a} > 0$	دو ریشه‌ی هم علامت	$\frac{-b}{a} > 0 \rightarrow$ هر دو ریشه +
		$\frac{c}{a} < 0$	دو ریشه‌ی مختلف علامه	$\frac{-b}{a} < 0 \rightarrow$ هر دو ریشه -
		$\frac{c}{a} = 0$	$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x = 0, x = -\frac{b}{a}$	
معادله دارای دو ریشه مجازی $\Delta < 0$	}	$\frac{-b}{a} > 0$	ریشه بزرگتر مثبت	
		$\frac{-b}{a} = 0$	دو ریشه‌ی قرینه‌ی هم	
		$\frac{-b}{a} < 0$	از جهت قدرمطلق ریشه بزرگتر منفی	

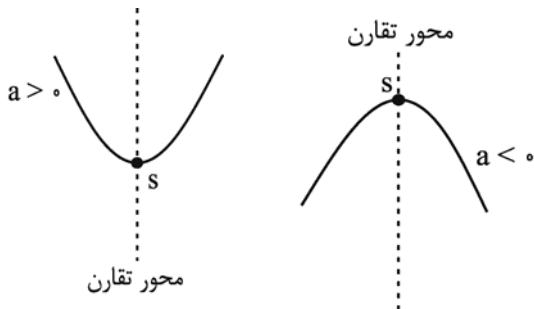
  

$\Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (مضاعف)	}	$\frac{-b}{a} > 0 \rightarrow$ ریشه مثبت
$\frac{-b}{a} = 0 \rightarrow$ ریشه برابر صفر		
$\frac{-b}{a} < 0 \rightarrow$ ریشه منفی		

$\Delta < 0 \rightarrow$  معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تابع درجه‌ی دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$ :

الف) رأس سهمی: اگر  $a < 0$  باشد، S مختصات نقطه ماکزیمم تابع و اگر  $a > 0$  باشد، S مختصات نقطه مینیمم تابع خواهد بود.



$$S = \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} & \text{طول نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم} \\ y = \frac{-\Delta}{4a} & \text{ماکزیمم یا مینیمم} \end{cases}$$

ب) معادله‌ی محور تقارن:  $x = -\frac{b}{2a}$

ج) دامنه و برد تابع: دامنه‌ی تابع درجه‌ی دوم همواره R است. برای برد تابع داریم:

(۱)  $a > 0 \rightarrow R_f = \left[ \frac{-\Delta}{4a}, +\infty \right)$

(۲)  $a < 0 \rightarrow R_f = \left( -\infty, \frac{-\Delta}{4a} \right]$

تعیین علامت تابع درجه‌ی دوم:

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$	تعیین علامت ( $X_1$ و $X_2$ ریشه‌های معادله هستند.)	نمودار											
		$a > 0$	$a < 0$										
$\Delta > 0$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>X_1</math></td> <td><math>X_2</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td colspan="2">موافق علامت <math>a</math></td> <td>مخالف علامت <math>a</math></td> <td>موافق علامت <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$X_1$	$X_2$	$+\infty$	$f(x)$	موافق علامت $a$		مخالف علامت $a$	موافق علامت $a$		
$x$	$-\infty$	$X_1$	$X_2$	$+\infty$									
$f(x)$	موافق علامت $a$		مخالف علامت $a$	موافق علامت $a$									
$\Delta = 0$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>X_1 = X_2</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td colspan="2">موافق علامت <math>a</math></td> <td>موافق علامت <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$X_1 = X_2$	$+\infty$	$f(x)$	موافق علامت $a$		موافق علامت $a$				
$x$	$-\infty$	$X_1 = X_2$	$+\infty$										
$f(x)$	موافق علامت $a$		موافق علامت $a$										
$\Delta < 0$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td colspan="2">همواره موافق علامت <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	همواره موافق علامت $a$							
$x$	$-\infty$	$+\infty$											
$f(x)$	همواره موافق علامت $a$												

چند نکته پیرامون تابع درجه‌ی دوم:

**نکته:** شرط لازم و کافی برای این که تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  به ازای جمیع مقادیر  $x$  همواره مثبت باشد، این است که:  $a > 0$  و  $\Delta < 0$

**نکته:** شرط لازم و کافی برای این که تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  به ازای جمیع مقادیر  $x$  همواره منفی باشد، این است که:  $a < 0$  و  $\Delta < 0$

**نکته:** در معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  شرط لازم و کافی برای آن که عددی مانند  $k$  بین ریشه‌های معادله باشد  $a \times f(k) < 0$  است همچنین برای آنکه عددی مانند  $k$  خارج ریشه‌ها باشد باید  $a \times f(k) > 0$  باشد.

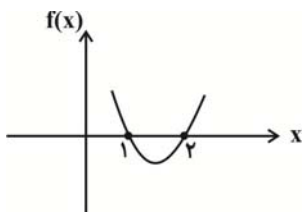
**نکته:** شرط کافی برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم در بازه‌ی  $(m, n)$  ریشه داشته باشد آن است که  $f(m) \cdot f(n) < 0$ .

صفرهای تابع:

برای یک تابع  $f(x)$  جواب‌های معادله  $f(x) = 0$  را صفرهای تابع  $f$  می‌گویند. به عبارتی دیگر صفرهای تابع  $f$ ، مقادیر  $x$  از دامنه  $f$  هستند که به ازای آن‌ها تابع  $f$  صفر می‌شود. **نکته:** در صورتی که نمودار  $f$  را رسم کنیم، صفرهای تابع،  $x$ هایی می‌شوند که محور طول ( $x$ ها) را قطع کرده است. به‌عنوان مثال صفرهای تابع  $x^2 - 3x + 2$ ،  $x = 1, 2$  است.

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

همان‌طور که در شکل واضح است صفرهای تابع، نقاط تلاقی تابع  $f$  و محور  $x$ ها است.



روش‌های به‌دست آوردن صفرهای تابع:

الف) مشخص بودن یکی از صفرهای تابع و به‌دست آوردن سایر صفرهای تابع:

این روش برای توابع چند جمله‌ای است. فرض کنید می‌دانیم  $x = a$  یکی از صفرهای چند جمله‌ای  $P(x)$  است، بنابراین چند جمله‌ای  $P(x)$  عاملی به‌صورت  $x - a$  دارد پس می‌توان نوشت  $P(x) = (x - a)Q(x)$ . بنابراین برای به‌دست آوردن سایر صفرهای تابع چند جمله‌ای  $P(x)$  کافی است صفرهای تابع چند جمله‌ای  $Q(x)$  را به‌دست آوریم. تابع  $Q(x)$  از تقسیم چند جمله‌ای  $P(x)$  بر  $x - a$  به‌دست می‌آید.

**مثال:** اگر  $x = -1$  یکی از صفرهای تابع چند جمله‌ای  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.  
**حل:** به دلیل این که  $x = -1$  یکی از صفرهای تابع  $P(x)$  است، پس چند جمله‌ای  $P(x)$  عاملی به فرم  $x+1$  دارد، بنابراین:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 & x + 1 \\ \hline -x^3 - x^2 & \\ \hline +x^2 - 5x - 6 & \\ -x^2 - x & \\ \hline -6x - 6 & \\ 6x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow Q(x) = x^2 + x - 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

بنابراین صفرهای تابع  $P(x)$ ،  $2$ ،  $-1$  و  $-3$  می‌شود.

**نکته:** گاهی اوقات می‌توان با حدس یکی از صفرهای تابع و استفاده از این روش سایر صفرهای تابع را به دست آورد.

**(ب) تغییر متغیر مناسب:**

برای به دست آوردن صفرهای برخی توابع می‌توان با استفاده از تغییر متغیر مناسب تابع را به تابعی تبدیل کرد که به دست آوردن صفرهای آن آسانتر است.

**مثال:** صفرهای تابع  $P(x) = (x^2 - 4)^2 - 4(x^2 - 4) + 3$  را به دست آورید.

**حل:** از تغییر متغیر  $u = x^2 - 4$  استفاده می‌کنیم، بنابراین تابع به صورت زیر می‌شود.

$$u^2 - 4u + 3 = 0 \rightarrow (u-3)(u-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 1 \rightarrow x^2 - 4 = 1 \rightarrow x^2 = 5 \\ u = 3 \rightarrow x^2 - 4 = 3 \rightarrow x^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{5} \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

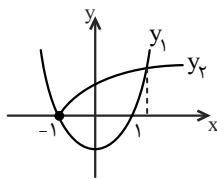
بنابراین صفرهای تابع  $P(x)$  عبارت‌اند از:  $\pm\sqrt{5}$ ،  $\pm\sqrt{7}$

**(ج) روش هندسی:**

در این روش اگر  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  دو تابع باشند، طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب‌های معادله  $f(x) = g(x)$  خواهند بود. با استفاده از این روش تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی جواب‌ها قابل تشخیص است.

**مثال:** معادله‌ی  $x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$  چند جواب دارد؟

**حل:** نمودارهای  $y_1 = x^2 - 1$  و  $y_2 = \sqrt{x+1}$  را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودارها و نقاط تلاقی آن‌ها، معادله دو ریشه دارد.

### سوالات تشریحی

#### تشکیل معادله و روابط بین ریشه‌ها

کرمان - نمونه محدثه - ۹۰ (۳ بار تکرار)

۲۶- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $3 - \sqrt{2}$  و  $3 + \sqrt{2}$  باشند.

#### تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید

۲۷- به ازای چه مقداری از  $k$  معادله‌ی  $kx^2 + 3x + (k^2 - 2) = 0$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی معکوس هم است؟ همدان - شهید مدنی - ۹۰ (۴ بار تکرار)



تابع درجه‌ی دوم

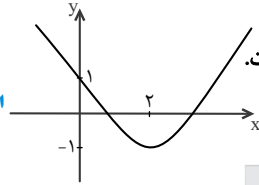
۲۸- دو عدد مثبت چنان بیابید که حاصل جمع دو برابر عدد اول با سه برابر عدد دوم برابر ۳۶ و حاصل ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

مشابه امتحان نهایی، شهریور ۸۸ (۵ بار تکرار)

(امتحان نهایی، دی ۹۰)

۲۹- بیشترین مقدار تابع  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$  را تعیین کنید.

۳۰- در شکل مقابل نمودار سهمی به معادله‌ی  $p(x) = ax^2 + bx + c$  داده شده است. ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$  را تعیین کنید.



امتحان نهایی، شهریور ۹۰ (۸ بار تکرار)

سوالات تستی

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

۳۱- عدد ۲۴ را به دو قسمت طوری تقسیم کرده‌ایم که حاصل ضرب آن‌ها ۱۴۳ شده است. اختلاف دو عدد کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۷۴)

- (۱) ۱      (۲) ۲  
(۳) ۳      (۴) ۴

تشکیل معادله و روابط بین ریشه‌ها

۳۲- در معادله‌ی  $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر باشد،  $m$  کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۲)

- (۱)  $\frac{59}{5}$       (۲)  $\frac{63}{5}$       (۳)  $\frac{59}{4}$       (۴)  $\frac{63}{4}$

۳۳- اگر  $a + 3b + 9c = 0$ ، آن‌گاه یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  همواره کدام است؟

(آزمون کانون ریاضی - ۹۳)

- (۱)  $\frac{-b}{3a}$       (۲)  $\frac{c}{3a}$       (۳)  $\frac{3c}{a}$       (۴)  $\frac{-3b}{a}$

۳۴- به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مجذورات دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی  $2x^2 - mx + m - 1 = 0$  برابر ۴ است؟

(سراسری ریاضی - ۷۲)

- (۱) -۶      (۲) -۲      (۳) ۲      (۴) ۶

۳۵- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $4x^2 - 12x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  چه قدر است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۶

۳۶- در معادله‌ی  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

- (۱) ۱۰      (۲) ۱۲      (۳) ۱۴      (۴) ۱۵

۳۷- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد متمایز باشند و  $\alpha^2 = 5\alpha - 3$  و  $\beta^2 = 5\beta - 3$ ، آن‌گاه  $\frac{\alpha}{\beta}$  و  $\frac{\beta}{\alpha}$  ریشه‌های کدام یک از معادله‌های زیر هستند؟

(آزمون کانون ریاضی - ۹۰)

- (۱)  $3x^2 - 19x + 3 = 0$       (۲)  $3x^2 + 19x - 3 = 0$   
(۳)  $3x^2 - 19x - 3 = 0$       (۴)  $3x^2 - 5x + 3 = 0$

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید

۳۸- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش ۹ برابر ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + x - 3 = 0$  باشد، کدام است؟

(سراسری تجربی - ۷۰)

- (۱)  $x^2 + 9x - 243 = 0$       (۲)  $x^2 + 9x - 27 = 0$       (۳)  $x^2 + 18x - 243 = 0$       (۴)  $x^2 + 18x - 27 = 0$

۳۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x = 1$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب‌های معادله  $8x^2 + kx - 1 = 0$  به صورت  $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$  است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۴۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت  $\left\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\right\}$  است؟ (سراسری ریاضی - ۹۲)

- (۱)  $4x^2 - 5x + 1 = 0$  (۲)  $4x^2 - 3x + 1 = 0$   
(۳)  $4x^2 - 5x - 1 = 0$  (۴)  $4x^2 - 3x - 1 = 0$

### تابع درجه‌ی دوم

۴۱- تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 + ax + 4$  می‌نیمی برابر ۳ دارد.  $a$  کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۷۸)

- (۱)  $\pm 4$  (۲)  $\pm 3$  (۳)  $\pm 2$  (۴)  $\pm 1$

۴۲- نمودار تابع با ضابطه  $y = x^2 + bx + 1$  روی محور  $oy$  دارای می‌نیم است.  $b$  کدام است؟

(سراسری تجربی - ۷۶)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۳- خط به معادله  $y = -\frac{5}{4}x$  محور تقارن منحنی تابع با ضابطه  $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + a$  را بر روی خود منحنی قطع می‌کند.  $a$  کدام است؟

(سراسری تجربی - ۷۴)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

(سراسری ریاضی - ۹۵)

- (۱)  $m > 2$  (۲)  $-1 < m < 2$   
(۳) هر مقدار  $m$  (۴) هیچ مقدار  $m$

۴۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، هر نقطه از نمودار تابع  $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$  بالای محور  $x$  هاست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

- (۱)  $a < -1$  (۲)  $a > 1$   
(۳)  $a > 2$  (۴)  $1 < a < 2$

۴۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی - ۹۲)

- (۱)  $a \leq 2$  (۲)  $0 < a \leq 2$   
(۳)  $2 < a < 3$  (۴)  $0 < a < 3$

### تعداد و علامت ریشه‌های معادله

۴۷- به ازای کدام مقادیر  $a$  معادله  $2x^2 + ax + a - \frac{3}{4} = 0$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟ (سراسری تجربی - ۸۱)

- (۱)  $a > 6$  یا  $a < 2$  (۲)  $a > 4$  یا  $a < 2$  (۳)  $2 < a < 6$  (۴)  $3 < a < 4$

۴۸- اگر معادله  $(m-1)x^2 + 4x + (m+2) = 0$  دارای دو جواب حقیقی باشد، مقادیر  $m$  کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۷۳)

- (۱)  $-2 \leq m \leq 1$  (۲)  $1 \leq m \leq 2$   
(۳)  $-2 \leq m \leq 2$  (۴)  $-3 \leq m \leq 2$

### صفرهای تابع

۴۹- معادله  $2^x - 1 = \sqrt{x}$  چند جواب دارد؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۵۰- اگر معادله  $(x-a)(x-b) + 1 = 0$  دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، کدام معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد؟ (آزاد پزشکی - ۷۸)

- (۱)  $(x-a)(x-b) + 2 = 0$  (۲)  $(b+x)(x-a) + 2 = 0$   
(۳)  $(x-a)(x-b) - 2 = 0$  (۴)  $x^2 - ab = 0$

درس ۳: معادلات گویا و گنگ

**حل معادلات گویا:** برای حل معادلات گویا از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

(۱) **تغییر متغیر:** در این روش با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان معادله را به معادله‌ی ساده‌تری تبدیل کرد و با حل معادله ساده‌تر جواب مسئله را به دست آورد.

**مثال:** معادله‌ی  $\left(\frac{2}{x+3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{x+3}\right) + 3 = 0$  را حل کنید.

**حل:** با تغییر متغیر  $m = \frac{2}{x+3}$  خواهیم داشت:

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \longrightarrow (m-3)(m-1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m=1, & m=3 \\ m = \frac{2}{x+3} \end{cases} \Rightarrow x = -1, x = \frac{-7}{3}$$

(۲) **حل معادله‌ی گویا با تبدیل آن به معادله‌ی جبری:** در این روش ابتدا ک.م.م.م.مخرج کسرها را به دست می‌آوریم. سپس طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم تا یک معادله‌ی جبری به دست آید. حال با حل معادله‌ی جبری می‌توان جواب‌های معادله را به دست آورد. باید توجه داشت جواب‌های به دست آمده نباید مخرج هیچ کدام از کسرهای اولیه را صفر کند در غیر این صورت نمی‌تواند جواب معادله باشد.

**مثال:** معادله‌ی  $\frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4}$  را حل کنید.

**حل:** ک.م.م.مخرج کسرها برابر است با  $m(m^2-4)$  پس:

$$m(m^2-4) \left[ \frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4} \right] \longrightarrow 3(m)(m-2) + 2(m^2-4) = (4m-4)(m)$$

$$\longrightarrow 3m^2 - 6m + 2m^2 - 8 = 4m^2 - 4m \longrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \longrightarrow (m-4)(m+2) = 0$$

$$\longrightarrow m = 4, m = -2$$

اما جواب  $m = -2$  غیر قابل قبول است چون مخرج کسرهای  $\frac{3}{m+2}$  و  $\frac{4m-4}{m^2-4}$  را صفر می‌کند. پس معادله‌ی مورد نظر یک جواب  $m = 4$  دارد. بنابراین  $m = 4$  تنها جواب معادله فوق است.

**حل معادلات گنگ:**

(۱) **تغییر متغیر:** همانند آنچه در حل معادلات گویا گفته شد، در بعضی موارد می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب معادله را به معادله‌ی ساده‌تری تبدیل کرد و معادله‌ی ساده‌تر را حل کرد.

**مثال:** معادله‌ی  $(2-\sqrt{x})^2 - \frac{7}{10}(2-\sqrt{x}) + \frac{1}{10} = 0$  را حل کنید.

**حل:** با تغییر متغیر  $m = 2 - \sqrt{x}$  داریم:

$$m^2 - \frac{7}{10}m + \frac{1}{10} = 0 \longrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{1}{5}\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{5} \\ m = 2 - \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9}{4}, x = \frac{81}{25}$$

(۲) **حل معادله‌ی گنگ با تبدیل آن به معادله‌ی گویا:**

با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم تکرار و ساده کردن آن معادله‌ای بدون عبارت گنگ به دست می‌آوریم سپس آن معادله را حل می‌کنیم و جواب‌ها را به دست می‌آوریم. در انتها جواب‌های به دست آمده را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم تا جواب‌های قابل قبول مشخص شوند. زیرا با به توان رساندن طرفین معادله، ممکن است جواب‌های اضافی در مسئله به وجود آید. هم‌چنین باید توجه داشت جواب‌های به دست آمده در دامنه‌ی تابع‌ها قرار داشته باشد.

مثال: معادله  $\sqrt{3 + \sqrt{x - x^3}} = \sqrt{3}$  را حل کنید.

حل: دامنه متغیر معادله  $[-1, 0] \cup [0, 1]$  است (چرا؟). طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم پس داریم:

$$3 + \sqrt{x - x^3} = 3 \rightarrow \sqrt{x - x^3} = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x - x^3 = 0 \rightarrow x(1 - x)(1 + x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

هر سه جواب به دست آمده در معادله اولیه صدق می‌کنند، همچنین در دامنه قرار دارند. بنابراین جواب‌های معادله خواهند بود.

### سوالات تشریحی

#### معادلات گویا

بلدختر - نمونه دانش - ۹۰ (۵ بار تکرار)

۵۱- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x - 1}$$

تالیفی

۵۲- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{9}{x^3 + 24} - \frac{16}{x^3 + 23} = 1$$

۵۳- دو کارگر می‌خواهند دیواری را رنگ بزنند. کارگر اول به تنهایی در ۸ ساعت دیوار را رنگ می‌زند. همچنین اگر ۲ کارگر همزمان کار کنند، در

تالیفی

۶ ساعت می‌توانند دیوار را رنگ بزنند. کارگر دوم به تنهایی در چند ساعت می‌تواند دیوار را رنگ بزند؟

#### معادلات گنگ

فانم شهر - فرزاتگان - ۸۵ (۷ بار تکرار)

۵۴- معادله  $\sqrt{x + 2} + 8\sqrt{x + 2} = 20$  را حل کنید.

امتحان نهایی، شهریور ۹۱

۵۵- معادله  $2\sqrt{x} = \sqrt{3x + 9}$  را حل کنید.

### سوالات تستی

#### معادلات گویا

(آزاد پزشکی صبح - ۸۸)

۵۶- معادله  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$  چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۴  
(۳) ۱  
(۴) ۲

(آزاد غیر پزشکی - ۹۰)

۵۷- معادله  $2x + \frac{3}{x} = -1$  چه وضعی دارد؟

- (۱) دو ریشه مثبت دارد.  
(۲) ریشه حقیقی ندارد.  
(۳) دو ریشه منفی دارد.  
(۴) ریشه مضاعف دارد.

(آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

۵۸- معادله  $\frac{x - 2}{x^2 - 1} - \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{5}{2 - 2x}$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

(سراسری ریاضی - ۷۵)

۵۹- تعداد جواب‌های معادله‌ی  $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

۶۰- ۱۸۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۱۵ درصد داریم. چند کیلوگرم نمک به این محلول اضافه کنیم تا غلظت آن به ۲۰ درصد برسد؟

(آزمون کانون ریاضی - ۹ مرداد ۹۴)

- (۱) ۱۱/۲۵  
(۲) ۱۳/۷۵  
(۳) ۱۱/۵  
(۴) ۱۳/۵

۶۱- دو کارگر با هم کاشی‌کاری یک ساختمان را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اگر هر یک به تنهایی کار را انجام دهند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را انجام می‌دهد. مجموع روزهایی که دو کارگر کار را به تنهایی تمام می‌کنند، چند روز است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۲۱ آذر ۹۳)

- (۱) ۱۸  
(۲) ۴۵  
(۳) ۸۰  
(۴) ۷۵

(آزمون کانون ریاضی - ۷ فروردین ۹۴)

۶۲- اگر معادله‌ی  $\frac{3-x}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{ax+b}{x^2-9}$  دارای بی‌شمار جواب باشد، حاصل  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۱۶  
(۳) ۹  
(۴) صفر

۶۳- خط  $y=2$  نمودار تابع  $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$  را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است. اگر O مبدأ مختصات باشد، زاویه‌ی AOB چند درجه است؟

(آزمون کانون ریاضی - ۳۰ خرداد ۹۳)

- (۱) ۴۵  
(۲) ۹۰  
(۳) ۶۰  
(۴) ۱۳۵

۶۴- تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی  $x^2 - 7 = (1 + \frac{x+2}{x-3})(2 - \frac{x+2}{x-3})$ ، کدام است؟

(آزمون کانون ریاضی - ۹۲)

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) هیچ

(آزمون کانون ریاضی - ۹۲)

۶۵- معادله‌ی  $\frac{3x-1}{4x^2+1} + \frac{4x^2+1}{3x-1} = \frac{1}{3}$ ، چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) بی‌شمار  
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) صفر

(آزمون کانون ریاضی - ۹۱)

۶۶- تعداد جواب‌های معادله‌ی  $\frac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+1} - \frac{x^2+x}{x^3-2x-1} = 1$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

معادلات گنگ

(آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

۶۷- مجموع جواب‌های معادله‌ی  $x - 2\sqrt{x+1} = -1$  کدام است؟

- (۱) -۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

(آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

۶۸- معادله‌ی  $\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{4-x^2} = 8$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی‌شمار