پاسخ تست‌های کنکور سراسری داخل کشور سال‌های ۹۰ تا ۹۶:
بهروز اسلامی- عباس امیدوار- فرزانه دانائی- میثم حمزه‌لوئی- حسین حاجیلو

# محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

راهبردهای حل، پاسخ تست‌های کنکور، آزمون‌های کانون: فرهاد حامی
تمرین‌های کتاب درسی: فرهاد حامی- حمید علیزاده

**راهبرد حل تیپ (۱)**

برای حل تست‌های این تیپ رابطه‌ی تقسیم را بنویسید و سپس از نکته‌ی زیر استفاده کنید.

نکته: اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه چندجمله‌ای $f(x)$ برتک تک عامل‌ها بخش‌پذیر است، یعنی:

$f(a)=0 \;,\; f(b)=0$

**۱- گزینه‌ی «۲»**

ابتدا رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^4+4ax^2+2bx+1=(x^2-4)Q(x)+0$$

مقدارعبارت به ازای $x=2$ و $x=-2$ صفر خواهد بود:

$$x=2 \to 16+16a+4b+1=0 \to 4a+b=\frac{-17}{4}$$

$$x=-2 \to 16+16a-4b+1=0 \to 4a-b=\frac{-17}{4}$$

از حل دستگاه بالا $b=0$ و $a=\frac{-17}{16}$ بنابراین $a+b=\frac{-17}{16}$.

**۲- گزینه‌ی «۴»**

چون $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است بنابراین $f(-2)=0$ است.

$$f(x)=x^4+ax^3-8x \to f(-2)=16-8a+16=0$$
$$\to 8a=32 \to a=4 \to f(x)=x^4+4x^3-8x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x+2$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{l|l} f(x)=x^4+4x^3-8x & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-(x^4+2x^3)} & x^3+2x^2-4x \\ \quad 2x^3-8x & \\ \underline{-(2x^3+4x^2)} & \\ \quad -4x^2-8x & \\ \underline{-(-4x^2-8x)} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+2)(x^3+2x^2-4x)=0$$

بنابراین با تجزیه‌ی چندجمله‌ای داریم:

$$\to \begin{cases} x+2=0 \to x=-2 \\ x(x^2+2x-4)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-1\pm\sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه، کوچکترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ برابر $x=-1-\sqrt{5}$ است.

**راهبرد حل تیپ (۲)**

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $f(x)$ و مشتقات متوالی آن تا مرتبه‌ی $(n-1)$ ام بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

**۳- گزینه‌ی «۴»**

چندجمله‌ای $f(x)=x^4+ax^2-bx+4$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است، پس $f(x)$ و $f'(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیرند، در نتیجه:

$$f(1)=0 \quad \text{و} \quad f'(1)=0$$
$$f(1)=0 \Rightarrow 1+a-b+4=0 \Rightarrow a-b=-5 \qquad (1)$$
$$f'(1)=0 \Rightarrow f'(x)=4x^3+2ax-b=0$$
$$\xrightarrow{x=1} 4+2a-b=0 \Rightarrow 2a-b=-4 \qquad (2)$$

با حل دستگاه معادله‌ی (۱) و (۲)، $a$ و $b$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a-b=-5 \\ 2a-b=-4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a=1 \Rightarrow b=6$$

**۴- گزینه‌ی «۲»**

چون عبارت $P(x)=ax^3+4x^2-14x+10-a$ بر $x^2-2x+1=(x-1)^2$ بخش‌پذیر است، بنابراین باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)^2$ برابر صفر است. رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$ax^3+4x^2-14x+10-a=(x-1)^2Q(x)+0$$

برای حذف $Q(x)$ و محاسبه‌ی $a$، $x=1$ قرار می‌دهیم:

$$a+4-14+10-a=0 \Rightarrow 0=0$$

تساوی همواره برقرار است. برای محاسبه‌ی $a$ از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$3ax^2+8x-14=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$$

با قرارداد $x=1$ داریم:

$$3a+8-14=0 \Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2$$

**راهبرد حل تیپ (۳)**

برای حل تست‌های این تیپ، رابطه‌ی تقسیم را بنویسید. توجه کنید که درجه‌ی باقیمانده باید حداقل ۱ درجه کم‌تر از درجه‌ی مقسوم علیه باشد.

**۵- گزینه‌ی «۱»**

$$f(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$$

چون $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، پس $f(-2)=0$، خواهیم داشت:

$$f(-2)=(-2)^{2n+1}+2(-2)^{2n}-32+40+k$$
$$=(-2)^{2n+1}-(-2)^{2n+1}-32+40+k=8+k$$
$$f(-2)=0 \Rightarrow 8+k=0 \Rightarrow k=-8$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2-1$، یک چندجمله‌ای به شکل $ax+b$ خواهد بود، رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3-8=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$

حال مقدارتساوی را به ازای $x=1$ و $x=-1$، می‌یابیم.

$$f(1)=-9=0+a+b \Rightarrow a+b=-9 \qquad (1)$$
$$f(-1)=-3=0-a+b \Rightarrow b-a=-3 \qquad (2)$$

از حل دستگاه (۱) و(۲)، $b=-6$ و $a=-3$، بنابراین $R(x)=-3x-6$.

**راهبرد حل تیپ (۴)**

در تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$، می‌توانیم با دسته‌بندی مناسب و تولید عامل $g(x)$ در $f(x)$، باقی‌مانده‌ی تقسیم را بیابیم. دقت کنید که، چندجمله‌ای $Q(x).g(x)$ همواره برچندجمله‌ای $g(x)$، بخش‌پذیر است.

### ۶- گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=(x^2-x)Q(x)+x+1$$

$$\Rightarrow xf(x)=(x^2-x)Q'(x)+x^2+x$$

چون درجه‌ی عبارت $x^2+x$ با مقسوم‌علیه برابر است، باید در آن عامل مقسوم‌علیه را بسازیم:

$$xf(x)=(x^2-x)Q'(x)+(x^2-x)+2x$$

$$=(x^2-x)Q''(x)+2x \Rightarrow R(x)=2x$$

**راهبرد حل تیپ (۵)**

در تعیین خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$، روش کلی استفاده از قاعده‌ی تقسیم است.

تذکر(۱): جمله‌ی فاقد $x$ (عدد ثابت چندجمله‌ای) در یک چندجمله‌ای از قرار دادن $x=0$ در چندجمله‌ای بدست می‌آید.

تذکر(۲): برای بدست آوردن مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای کافی است به جای متغیر آن عدد ۱ را قرار دهیم.

### ۷- گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=3x^3-10x^2=(3x-1)Q(x)+R$$

ابتدا $R$ را می‌یابیم، یعنی $f\left(\frac{1}{3}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$3\left(\frac{1}{27}\right)-10\left(\frac{1}{9}\right)=0+R \rightarrow R=-1$$

$$3x^3-10x^2=(3x-1)Q(x)-1$$

ضریب جمله‌ی فاقد $x$ همان عدد ثابت چند جمله‌ای $Q(x)$ است. برای یافتن عدد ثابت چند جمله‌ای کافی است $Q(0)$ را تشکیل دهیم. پس در عبارت به جای $x$، صفر قرار می‌دهیم:

$$0=-Q(0)-1 \rightarrow Q(0)=-1$$

### ۸- گزینه‌ی «۱»

رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{15}+x^3+2x-11=(x+1)Q(x)+R$$

و باقی‌مانده را می‌یابیم یعنی به جای $x$، $(-1)$ قرار می‌دهیم:

$$-1-1-2-11=0+R \Rightarrow R=-15$$

پس:

$$x^{15}+x^3+2x-11=(x+1)Q(x)-15$$

باید برای یافتن مجموع ضرایب خارج قسمت، $Q(1)$ را محاسبه کنیم. در تساوی فوق به جای $x$، ۱ قرار دهیم:

$$1+1+2-11=2Q(1)-15 \Rightarrow 2Q(1)=8 \Rightarrow Q(1)=4$$

### ۹- گزینه‌ی «۴»

رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$5x^4-3x^2+ax-1=(x+1)Q(x)+R \quad (*)$$

با قرار دادن $x=-1$، باقیمانده را می‌یابیم:

$$x=-1 \Rightarrow 5-3-a-1=0+R \Rightarrow 1-a=R \quad (1)$$

چون مجموع ضرایب $Q(x)$ برابر ۷ است، پس $Q(1)=7$ در نتیجه با قرار دادن $x=1$ در تساوی $(*)$ خواهیم داشت:

$$5-3+a-1=2\times7+R \Rightarrow a=13+R \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$a=7$$

### ۱۰- گزینه‌ی «۱»

رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{15}+x^3+2x-11=(x-1)Q(x)+R$$

و باقی‌مانده را می‌یابیم، یعنی به جای $x$، (۱) قرار می‌دهیم:

$$1+1+2-11=0+R \rightarrow R=-7$$

$$x^{15}+x^3+2x-11=(x-1)Q(x)-7$$

باید برای یافتن مجموع ضرایب خارج قسمت $Q(1)$ را محاسبه کنیم اما اگردر تساوی فوق به جای $x$، ۱ قرار دهیم، به‌دلیل وجود عامل صفرشونده، به تساوی $-7=-7$ می‌رسیم.

در اینجا از مشتق استفاده می‌کنیم. از دو طرف رابطه مشتق می‌گیریم:

$$15x^{14}+3x^2+2=Q(x)+(x-1)Q'(x)$$

حال به جای $x$، (۱) قرار می‌دهیم:

$$15+3+2=Q(1)+0 \rightarrow Q(1)=20$$

**راهبرد حل تیپ (۶)**

به بخش « ب.م.م و ک.م.م » در درس توجه کنید.

### ۱۱- گزینه‌ی «۳»

اگر بخواهیم تعداد شیشه‌ها حداقل باشد باید گنجایش شیشه‌ها حداکثر باشد بطوریکه حجم مایعات به حجم شیشه‌ها بخش‌پذیر باشد بنابراین باید بین گنجایش شیشه‌ها بزرگترین مقسوم علیه مشترک را انتخاب کنیم.
برای این کار، پس از تجزیه‌ی اعداد به عامل‌های اول، عامل‌های مشترک با توان کمتر را انتخاب می‌کنیم.

$$(72,40,48)=(2^3\times3^2,2^3\times5,2^3\times6)=2^3=8$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حداقل تعداد شیشه‌های آب‌میوه}=\frac{72}{8}=9 \\ \text{حداقل تعداد شیشه‌های شیر}=\frac{40}{8}=5 \\ \text{حداقل تعداد شیشه‌های دوغ}=\frac{48}{8}=6 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \text{حداقل تعداد شیشه‌ها}=9+5+6=20$$

### ۱۲- گزینه‌ی «۲»

اگر عدد $a$ را فرض کنیم، آنگاه $a-2$ بر ۴، ۵ ، ۷ و ۳ بخش‌پذیر است، لذا بر حاصلضرب آنها نیز بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$a-2=(3\times7\times5\times4)k \Rightarrow a-2=420k$$

از آنجایی که $800\le a\le900$، پس $k=2$ و از آنجا:

$$a=840+2=842$$

**۱۳- گزینه‌ی «۳»**

مدت زمانی که طول می‌کشد که سه زنگ با هم زنگ بزنند، در واقع همان ک.م.م سه عدد ۱۸، ۲۴ و ۳۲ است، پس:

$$۱۸ = ۲ \times ۳^۲ \quad و \quad ۲۴ = ۲^۳ \times ۳ \quad و \quad ۳۲ = ۲^۵$$

$$\text{ک.م.م} = ۲^۵ \times ۳^۲ = ۳۲ \times ۹ = ۲۸۸$$

**۱۴- گزینه‌ی «۱»**

باید چندجمله‌ای $P(x)$ به ازای ریشه‌ی عبارت $x-۱$ برابر ۴ شود و به ازای ریشه‌ی عبارت $x+۲$ برابر صفر شود، بنابراین:

$$x-۱=۰ \to x=۱ \to P(۱)=۴ \to ۱+a+۱+b=۴$$
$$\to a+b=۲$$
$$x+۲=۰ \to x=-۲ \to P(-۲)=۰ \to -۸+۴a-۲+b=۰$$
$$\to ۴a+b=۱۰$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a+b=۲ \\ ۴a+b=۱۰ \end{cases}$ خواهیم داشت:

$$a=\frac{۸}{۳}, b=\frac{-۲}{۳} \to \frac{a}{b}=\frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{-۲}{۳}}=-۴$$

**۱۵- گزینه‌ی «۲»**

چون نمودار تابع $y=x+f(x)$ از نقاط $(۱,۰)$ و $(۲,۰)$ می‌گذرد، پس:

$$\xrightarrow{(۱,۰)\in y} ۱+f(۱)=۰ \to f(۱)=-۱$$
$$\xrightarrow{(۲,۰)\in y} ۲+f(۲)=۰ \to f(۲)=-۲$$

رابطه‌ی تقسیم را برای $f(x)$ می‌نویسیم:

$$f(x)=(x^۲-۳x+۲)Q(x)+ax+b$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=a+b=-۱ \\ f(۲)=۲a+b=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=۰ \end{cases} \Rightarrow R(x)=-x$$

**۱۶- گزینه‌ی «۳»**

چون عبارت درجه‌ی دوم بر $x-\alpha$ و $x-\beta$ بخش‌پذیر است، پس $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله هستند لذا:

$$۴\alpha\beta+(\alpha-\beta)^۲=۴\alpha\beta+\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta$$
$$=(\alpha+\beta)^۲=\left(-\frac{b}{a}\right)^۲=(-p)^۲=p^۲$$

**۱۷- گزینه‌ی «۲»**

از آن‌جایی که:

$$۹x^۲-۶x+۱=(۳x-۱)^۲$$

بنابراین $۳x-۱$ عامل مشترک دو عبارت خواهد بود، در نتیجه باید $x=\frac{۱}{۳}$ عبارت دوم را صفر کند.

$$x^۳+cx^۲+۲ \overset{x=\frac{۱}{۳}}{=\!=\!=} ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲۷}+\frac{c}{۹}+۲=۰ \Rightarrow ۱+۳c+۵۴=۰$$
$$\Rightarrow c=-\frac{۵۵}{۳}$$

**راهبرد حل تیپ (۷)**

جمله‌ی $(k+۱)$ ام بسط $(a+b)^n$، برابر است با:

$$\binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k = \text{ام} (k+۱) \text{ جمله‌ی}$$

به عنوان مثال در بسط $(\sqrt{x}+\frac{۱}{x})^۷$ برای محاسبه‌ی جمله‌ی ششم، $k=۵$ است.

تذکر: در مواردی که عبارت به صورت رادیکالی است، بهتر است آن را به توان گویا تبدیل کنیم.

**۱۸- گزینه‌ی «۱»**

جمله‌ی $(k+۱)$ ام بسط عبارت است از:

$$\text{أم} (k+۱) \text{ جمله‌ی} = \binom{۸}{k}۱^{۸-k}.\left(\frac{-x}{۲}\right)^k$$
$$=\binom{۸}{k}\left(\frac{-۱}{۲}\right)^k(x)^k \Rightarrow x^k=x^۳ \Rightarrow k=۳$$
$$\text{جمله‌ی چهارم} = \binom{۸}{۳}(۱)^۵\left(\frac{-x}{۲}\right)^۳=\frac{۸!}{۳!۵!}\times\left(\frac{-۱}{۲}\right)^۳x^۳=-۷x^۳$$

**۱۹- گزینه‌ی «۲»**

چون: $(۱+\sqrt{۲})^۲=۱+۲+۲\sqrt{۲}=۳+۲\sqrt{۲}$

پس با توجه به تساوی داده شده خواهیم داشت:

$$(۱+\sqrt{۲})^{۲n}=۹۹+b\sqrt{۲} \Rightarrow ((۱+\sqrt{۲})^۲)^n=۹۹+b\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow (۳+۲\sqrt{۲})^n=۹۹+b\sqrt{۲} \quad (*)$$

از تساوی $(*)$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$(۳-۲\sqrt{۲})^n=۹۹-b\sqrt{۲} \quad (**)$$

زیرا در بسط‌های $(*)$ و $(**)$ جملات فرد (جملاتی که عدد $-۲\sqrt{۲}$ توان زوج دارد) کاملاً یکسانند و جملات زوج (جملاتی که عدد $-۲\sqrt{۲}$ توان فرد دارد) قرینه‌ی یکدیگرند پس نتیجه‌گیری درست است. دقت کنید در حالتی که $(-۲\sqrt{۲})$ توان فرد دارد رادیکال حذف نمی‌شود.

حال برای محاسبه‌ی $b$ کافیست طرفین عبارت‌های $(*)$ و $(**)$ را در هم ضرب کنیم: (در ضرب عبارت‌ها از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.)

$$\begin{cases} (۳+۲\sqrt{۲})^n=۹۹+b\sqrt{۲} \\ (۳-۲\sqrt{۲})^n=۹۹-b\sqrt{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب}} (۹-۸)^n=(۹۹)^۲-۲b^۲$$
$$\Rightarrow ۱=۹۸۰۱-۲b^۲ \Rightarrow ۲b^۲=۹۸۰۰ \Rightarrow b^۲=۴۹۰۰ \Rightarrow b=۷۰$$

**راهبرد حل تیپ (۸)**

برای یافتن جمله‌ی فاقد $x$، کافی است فرمول جمله‌ی عمومی را نوشته و پس از ساده کردن توان‌ها، توان $x$ را برابر صفر قرار دهیم.

**۲۰- گزینه‌ی «۴»**

در بسط $(a+b)^n$ جمله $(k+۱)$ ام از فرمول $\binom{n}{k}a^{n-k}.b^k$ به دست می‌آید، پس:

$$\binom{۶}{k}(x^۲)^{۶-k}.(\frac{۲}{x})^k=۲^k\binom{۶}{k}x^{۱۲-۲k}.x^{-k}$$

$$=2^k\binom{6}{k}x^{12-3k}$$

چون جمله‌ی مستقل از $x$ مورد نظر است باید توان $x$، صفر باشد، یعنی:

$$12-3k=0\Rightarrow k=4$$

بنابراین ضریب جمله‌ی پنجم را می‌خواهیم:

$$2^4\binom{6}{4}=16\times\frac{6!}{4!\,2!}=16\times 15=240$$

**راهبرد حل تیپ (۹)**

در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$، برای ضرایب جملات، رابطه‌ی زیر را داریم:

هر ضریبی در یک بسط ، در هر سطر مثلث(به‌جز ۱)، مجموع دو عددی است که در بالا به‌طور مورب قرار دارند.

به مثلث خیام- پاسکال برای ضرایب بسط دوجمله‌ای توجه کنید:

$$\begin{array}{lccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
(a+b)^2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
(a+b)^3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
(a+b)^4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

**۲۱– گزینه‌ی «۲»**

مجموع خواسته شده، مجموع ضرایب مثبت بسط $(a-b)^7$، که مقدار آن برابر $64=2^6=2^{7-1}$ است.

**راهبرد حل تیپ (۱۰)**

بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$، دارای $n+1$ است. اولین جمله‌ی آن $a^n$ و آخرین جمله‌ی آن $b^n$ است، توان $a$ یک واحد یک واحد، کاهش و توان $b$ یک واحد یک واحد افزایش می‌یابند.

**۲۲– گزینه‌ی «۱»**

بسط $(2x+1)^5$، دارای ۶ جمله از درجه‌های صفر تا ۵ است.

بسط $(x+3)^7$، دارای ۸ جمله از درجه‌های صفر تا ۷ است.

در بسط $(2x+1)^5+(x+3)^7$، جمله‌های هم درجه‌ی هر کدام از بسط‌های بالا، با هم جمع می‌شوند و تشکیل یک جمله می‌دهند، پس این عبارت ۸ جمله دارد.

**راهبرد حل تیپ (۱۱)**

در اعداد گویا همواره توان‌ها اعداد طبیعی هستند.

در تعیین تعداد جملات گویای بسط دوجمله‌ای، ابتدا جمله‌ی عمومی را می‌نویسیم و سپس با تبدیل رادیکال‌ها به توان گویا، توان‌ها را با شرط عدد طبیعی بودن بررسی می‌کنیم. جواب‌های مشترک دو معادله، تعداد جملات گویا را می‌دهد.

**۲۳– گزینه‌ی «۳»**

جمله‌ی $(k+1)$ام را می‌نویسیم:

$$\text{ام}\ (k+1)\ \text{جمله‌ی}=\binom{16}{k}(2x^{\frac{1}{4}})^{16-k}.(x^{\frac{-2}{3}})^k$$

$$\text{ام}\ (k+1)\ \text{جمله‌ی}=\binom{16}{k}2^{16-k}.x^{\frac{16-k}{4}}.x^{\frac{-2k}{3}}$$

با توجه به توان‌های فوق باید اولاً $16-k$ مضرب ۴ باشد، ثانیاً $k$ مضرب ۳ باشد، لذا:

$$1)\ \ k\in\{\underline{\underline{0}},4,8,\underline{\underline{12}},16\}$$

$$2)\ \ k\in\{\underline{\underline{0}},3,6,9,\underline{\underline{12}},15\}$$

چون دو شرط باید با هم اتفاق بیافتد بنابراین جواب مشترک دو مجموعه قابل قبول خواهد بود. در نتیجه $k=0,12$ قابل قبول است و فقط ۲ جمله گویاست.

**۲۴– گزینه‌ی «۴»**

جمله‌ی $(k+1)$ام را می‌نویسیم:

$$\text{ام}\ (k+1)\ \text{جمله‌ی}=\binom{64}{k}(2^{\frac{1}{3}})^{64-k}\times(3^{\frac{1}{6}})^k$$

$$=\binom{64}{k}2^{\frac{64-k}{3}}\times 3^{\frac{k}{6}}$$

با توجه به توان‌های فوق باید اولاً $64-k$ مضرب ۳ باشد، ثانیاً $k$ مضرب ۶ باشد، لذا:

$$\begin{cases}k=6n\\64-k=3m\end{cases}\Rightarrow 64-6n=3m\Rightarrow 64=3(m+2n)$$

چون ۶۴ مضربی از ۳ نیست، پس مقداری برای $m$ و $n$ وجود نخواهد داشت و بسط فوق فاقد جمله‌ی گویا خواهد بود.

**۲۵– گزینه‌ی «۱»**

بسط را انجام می‌دهیم:

$$(1+\sqrt{2})^5=1^5+5\times1^4\times\sqrt{2}+10\times1^3\times(\sqrt{2})^2+10\times1^2\times(\sqrt{2})^3+5\times1^1\times(\sqrt{2})^4+(\sqrt{2})^5$$

$$(1+\sqrt{2})^5=1+5\sqrt{2}+10\times2+10\times2\sqrt{2}+5\times4+4\sqrt{2}=41+29\sqrt{2}$$

پس $a=29$.

**۲۶– گزینه‌ی «۴»**

در بسط $(a+b)^n$، ضریب جمله‌ی $(k+1)$ام برابر $\binom{n}{k}$ است، پس:

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{3}\Rightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n!}{3!(n-3)!}\Rightarrow n-2=3$$

$$\Rightarrow n=5$$

**۲۷– گزینه‌ی «۴»**

جمله‌ی چهارم بسط را می‌نویسیم:

$$\text{جمله‌ی چهارم}=\binom{n}{3}(\sqrt[3]{x})^{n-3}.(x^{-2})^3$$

$$=\binom{n}{3}x^{\frac{n-3}{3}}.x^{-6}=\binom{n}{3}x^{\frac{n-3-18}{3}}$$

$$=\binom{n}{3}x^{\frac{n-21}{3}}$$

بنابراین باید $\frac{n-21}{3}=5$ باشد و در نتیجه $n=36$.

**۲۸- گزینه‌ی «۱»**

$$(۱+x)^۴(\frac{x+۱}{x})^۴ = \frac{(۱+x)^۸}{x^۴} = \frac{۱}{x^۴}(۱+x)^۸$$

چون در سؤال، ضریب $\frac{۱}{x}$ خواسته شده، پس باید جمله‌ای از بسط $(۱+x)^۸$ را در نظر بگیریم که توان $x$ در آن ۳ باشد، یعنی جمله‌ی چهارم، پس ضریب جمله‌ی چهارم را می‌یابیم.

$$\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!\,۵!} = \frac{۸\times۷\times۶}{۳\times۲} = ۵۶$$

**۲۹- گزینه‌ی «۳»**

در بسط $(۱+\alpha x)^۴$ که دارای ۵ جمله است، جمله‌ی سوم، جمله‌ی وسط است که برابر $۶\times۱\times(\alpha x)^۲$ خواهد بود و در بسط $(۱-\alpha x)^۶$ که دارای ۷ جمله است، جمله‌ی وسط، جمله‌ی چهارم است که برابر است با $-۲۰\times۱^۳\times(\alpha x)^۳$، بنابراین:

$$۶\alpha^۲ = -۲۰\alpha^۳ \Rightarrow ۳ = -۱۰\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-۳}{۱۰}$$

**۳۰- گزینه‌ی «۱»**

$$(\sqrt{x}(۱+\sqrt{x}))^۴(\sqrt{x}+۱)^۷ = x^۲(\sqrt{x}+۱)^{۱۱}$$

جمله‌ی $(k+۱)$ام بسط $x^۲(\sqrt{x}+۱)^{۱۱}$ را می‌یابیم:

$$= x^۲\left(\binom{۱۱}{k}(\sqrt{x})^{۱۱-k}\times۱^k\right) = x^۲\binom{۱۱}{k}x^{\frac{۱۱-k}{۲}} = \binom{۱۱}{k}x^{۲+\frac{۱۱-k}{۲}}$$

باید توان $x$ در عبارت ۵ باشد، پس:

$$\frac{۱۱-k}{۲}+۲=۵ \Rightarrow k=۵$$

بنابراین ضریب $x^۵$ برابر $\binom{۱۱}{۵}$ است.

**راهبرد حل تیپ (۱۲)**

اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ باشند آنگاه:

$$S = x'+x'' = \frac{-b}{a} \quad \text{(مجموع ریشه‌ها)}$$

$$P = x'x'' = \frac{c}{a} \quad \text{(حاصلضرب ریشه‌ها)}$$

در این حالت معادله به‌صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ تبدیل خواهد شد.

الف- اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه $|x'-x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

ب- با استفاده از اتحادهای جبری و محاسبه‌ی $S$ و $P$ می‌توانیم بدون محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم، حاصل مقادیر مختلفی را برحسب ریشه‌ها بیابیم، به چند اتحاد زیر توجه کنید:

(۱) $a^۲+b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$

(۲) $a^۳+b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$

(۳) $a^۲-b^۲ = (a-b)(a+b)$

(۴) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲ = a+b+۲\sqrt{ab}$ ، $a\,,\,b>۰$

پ- همواره ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند یعنی در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ $(a\neq۰)$ اگر $x_۱$ ریشه‌ی معادله باشد، آنگاه:

$$ax_۱^۲+bx_۱+c=۰$$

**۳۱- گزینه‌ی «۲»**

اگر ریشه‌های معادله را $x_۱$ و $x_۲$ بگیریم، پس:

$$x_۱x_۲ = (\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x_۱x_۲ = ۲$$

پس:

$$\frac{c}{a} = ۲ \Rightarrow \frac{m^۲-۳}{m} = ۲ \Rightarrow m^۲-۳ = ۲m$$

$$\Rightarrow m^۲-۲m-۳=۰ \Rightarrow m=-۱\ ,\ m=۳$$

اما به ازای $m=۳$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد، زیرا $\Delta$ ی آن منفی خواهد شد، پس $m=-۱$ قابل قبول است.

**۳۲- گزینه‌ی «۱»**

$$mx^۲-(m+۳)x+۵=۰ \rightarrow \begin{cases} S = x_۱+x_۲ = \frac{-b}{a} = \frac{m+۳}{m} \\ P = x_۱x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{۵}{m} \end{cases}$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲ = ۶ \rightarrow S^۲-۲P = ۶ \rightarrow \left(\frac{m+۳}{m}\right)^۲ - ۲\left(\frac{۵}{m}\right) = ۶$$

$$\rightarrow \frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲} - \frac{۱۰}{m} = ۶$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{در } m^۲\neq۰} m^۲+۶m+۹-۱۰m = ۶m^۲ \rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \begin{cases} m=۱ \\ m=\frac{c}{a}=-\frac{۹}{۵} \end{cases}$$

$$m=۱ \rightarrow x^۲-۴x+۵=۰ \rightarrow \Delta=-۴<۰$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$m=\frac{-۹}{۵} \rightarrow \frac{-۹}{۵}x^۲-\frac{۶}{۵}x+۵=۰ \rightarrow \Delta>۰$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

**۳۳- گزینه‌ی «۳»**

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله باشند، بدیهی است که $\alpha$ و $\beta$ مثبت هستند. با فرض $A = \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ داریم:

$$A = \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

حال طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^۲ = \frac{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} = \frac{S+۲\sqrt{P}}{P}$$

از آنجایی که $S = \frac{-b}{a} = \frac{۱۲}{۴} = ۳$ و $P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۴}$، پس:

$$A^2=\frac{3+2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}}\Rightarrow A^2=16\xrightarrow{A>0}A=4$$

### ۳۴- گزینه‌ی «۳»

با بازنویسی معادله‌ی $x(5x+3)=2$ خواهیم داشت:

$$5x^2+3x-2=0$$

در این معادله $a+c=b$، پس $\alpha=-1$ و $\beta=\frac{2}{5}$ خواهد بود، بنابراین ریشه‌های معادله‌ی جدید عبارتند از:

$$\frac{1}{\alpha^2}=1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{\beta^2}=\frac{25}{4}$$

ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا:

$$4-k+25=0\to k=29$$

### ۳۵- گزینه‌ی «۲»

اگر $\alpha$ و $\beta$ را ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-17x+m=0$ در نظر بگیریم با توجه به فرض مسئله $\alpha=3\beta+3$ است. از طرف $S=\alpha+\beta=\frac{17}{3}$ و $P=\alpha.\beta=\frac{m}{3}$، حال به کمک رابطه‌ی داده شده و رابطه‌ی $S$، $\alpha$ و $\beta$ را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases}\alpha=3\beta+3\\ \alpha+\beta=\frac{17}{3}\end{cases}\to\alpha=\frac{15}{3}\ ,\ \beta=\frac{2}{3}$$

$$\frac{m}{3}=\alpha.\beta\to\frac{m}{3}=\frac{30}{9}\to m=10$$

### ۳۶- گزینه‌ی «۲»

ریشه‌های معادله را $\alpha$ و $\beta$ در نظر می‌گیریم. از آنجا که یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است، داریم:

$$\alpha=\frac{\beta}{2}+5\quad(*)$$

از طرفی با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر ۸ است، یعنی:

$$\alpha+\beta=8\quad(**)$$

از $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{\beta}{2}+5\\ \alpha+\beta=8\end{cases}\Rightarrow\frac{\beta}{2}+5+\beta=8\Rightarrow\frac{3\beta}{2}=3\Rightarrow\beta=2$$

چون $\beta$ ریشه‌ی معادله است، پس در آن صدق می‌کند، بنابراین:

$$\beta=2:(2)^2-8(2)+m=0\Rightarrow m=12$$

### ۳۷- گزینه‌ی «۳»

اگر ریشه های معادله‌ی $2x^2+ax+9=0$ را $\alpha$ و $\beta$ در نظر بگیریم، آنگاه طبق فرضیات مسأله $\alpha=2\beta$، از طرفی:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{9}{2}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{9}{2}$$

اما $\alpha=2\beta$، پس:

$$(2\beta)\beta=\frac{9}{2}\Rightarrow\beta^2=\frac{9}{4}\Rightarrow\beta=\pm\frac{3}{2}$$

اما ریشه‌ها طبق فرض مسأله مثبت‌اند، پس:

$$\alpha=3\ ,\ \beta=\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=3+\frac{3}{2}=4/5$$

**راهبرد حل تیپ (۱۳)**

برای تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید، $y$ را ریشه‌ی معادله‌ی جدید و $x$ را ریشه‌ی معادله‌ی قدیم فرض می‌کنیم و رابطه‌ی بین $x$ و $y$ را می‌یابیم و در معادله‌ی قدیم به جای $x$ برحسب $y$ قرار می‌دهیم و با محاسبات، معادله‌ی جدید را می‌یابیم.

### ۳۸- گزینه‌ی «۱»

ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ را $y$ و ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-7x+3=0$ را $x$ می‌نامیم.

$$y=\frac{2}{x}\Rightarrow x=\frac{2}{y}$$

با جاگذاری به جای $x$ در معادله داریم:

$$4\left(\frac{2}{y}\right)^2-7\left(\frac{2}{y}\right)+3=0$$

$$\frac{16}{y^2}-\frac{14}{y}+3=0\xrightarrow{\text{در } y^2 \text{ ضرب می‌کنیم}}3y^2-14y+16=0$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی بدست آمده با معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ داریم:

$$a=-14\ ,\ b=16$$

### ۳۹- گزینه‌ی «۲»

ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+b=0$ را $y$ و ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x+1=0$ را $x$ می‌نامیم، طبق فرض مسأله:

$$y=x+1\Rightarrow x=y-1$$

با جایگذاری به جای $x$ در معادله‌ی معلوم داریم:

$$3x^2+7x+1=0$$

$$\Rightarrow 3(y-1)^2+7(y-1)+1=0\Rightarrow 3y^2+y-3=0$$

بنابراین معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{3}x-1=0$$

با مقایسه با معادله‌ی $x^2+ax+b=0$، $b=-1$ خواهد بود.

### ۴۰- گزینه‌ی «۴»

اگر جواب‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ (۱) را با $y$ و جواب‌های معادله‌ی $3x^2-4x-1=0$ را با $x$ نمایش دهیم، آنگاه طبق فرضیات مسأله خواهیم داشت:

$$y=x+1\Rightarrow x=y-1$$

با جایگذاری به جای ریشه در معادله‌ی معلوم داریم:

$$3(y-1)^2-4(y-1)-1=0\Rightarrow 3y^2-10y+6=0\quad(2)$$

جواب‌های معادله‌های (۱) و (۲) برابرند، پس:

$$a=-10 \quad \text{و} \quad b=6$$

### ۴۱- گزینه‌ی «۴»

اگر ریشه‌های معادله‌ی جواب را $X$ بگیریم و ریشه‌ی معادله‌ی داده شده را $x$ در نظر بگیریم طبق فرض خواهیم داشت:

$$X=\frac{1}{x}-1$$

x را از معادله‌ی بالا یافته و در معادله‌ی اولیه جایگزین می‌نماییم:

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=X+1 \Rightarrow x=\frac{1}{X+1}$$

$$2x^2-3x-1=0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{X+1}\right)^2-3\left(\frac{1}{X+1}\right)-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(X+1)^2}-\frac{3}{(X+1)}-1=0$$

$$\xrightarrow{\times(X+1)^2} 2-3(X+1)-(X+1)^2=0$$

$$\Rightarrow 2-3X-3-X^2-2X-1=0 \Rightarrow X^2+5X+2=0$$

### ۴۲- گزینه‌ی «۲»

با توجه به این‌که $\{\alpha^2\beta,\alpha\beta^2\}$ مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $8x^2+kx-1=0$ هستند، برای محاسبه‌ی مقدار $k$ کافی است مجموع ریشه‌ها را بیابیم:

$$S'=\frac{-b}{a}\Rightarrow \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\frac{-k}{8}$$

$$\Rightarrow(\alpha\beta)(\alpha+\beta)=\frac{-k}{8}\,(*)$$

اما از آن‌جا که $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-1=0$ هستند بنابراین:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}\\ \alpha\beta=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

پس:

$$\xrightarrow{(*)} -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-k}{8}\Rightarrow k=6$$

### ۴۳- گزینه‌ی «۳»

با توجه به اینکه $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ است داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\ ,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-2 \qquad (*)$$

چون ریشه‌های معادله‌ی مطلوب $\frac{1}{\alpha}+1$ و $\frac{1}{\beta}+1$ هستند، خواهیم داشت:

$$S=\frac{1}{\alpha}+1+\frac{1}{\beta}+1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2\overset{(*)}{=\!=}\frac{\frac{3}{2}}{-2}+2=\frac{5}{4}$$

$$P=\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{\beta}+1\right)=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+1$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1\overset{(*)}{=\!=}\frac{1}{-2}+\frac{\frac{3}{2}}{-2}+1=-\frac{1}{4}$$

پس با توجه به رابطه‌ی $x^2-Sx+P=0$ معادله‌ی مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\times(4)} 4x^2-5x-1=0$$

**راهبرد حل تیپ (۱۴)**

در معادله‌ی درجه دوم، شرط وجود دو ریشه‌ی حقیقی متمایز آن است که $\Delta>0$ باشد:

الف- اگر دو ریشه‌ی حقیقی معادله مثبت باشند، آن‌گاه $-\frac{b}{a}>0\ ,\ \frac{c}{a}>0$.

ب- اگر دو ریشه‌ی حقیقی معادله منفی باشند، آن‌گاه $-\frac{b}{a}<0\ ,\ \frac{c}{a}>0$.

ج- قرینه‌ی هم باشند، آن‌گاه $b=0$ است.

د- عکس هم باشند، آن‌گاه $a=c$ است.

### ۴۴- گزینه‌ی «۲»

فرض کنیم که $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم مورد نظر سؤال باشند، آن‌گاه طبق فرض:

$$x_1=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_1x_2=1$$

از طرفی می‌دانیم که اگر معادله‌ی درجه‌ دوم $ax^2+bx+c=0$، دارای ریشه‌های $x_1$ و $x_2$ باشد، آنگاه $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

$$mx^2+3x+(m^2-2)=0 \xrightarrow{x_1x_2=1} \frac{m^2-2}{m}=1$$

با فرض $m\neq 0$، طرفین معادله‌ی اخیر را در $m$ ضرب می‌کنیم:

$$m^2-2=m \Rightarrow m^2-m-2=0\Rightarrow (m-2)(m+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=2\Rightarrow 2x^2+3x+2=0\Rightarrow \Delta<0: \text{ریشه ندارد}\Rightarrow \text{غقق}\\ m=-1\end{cases}$$

### ۴۵- گزینه‌ی «۴»

اگر فرض کنیم ضرب دو عدد با در نظر گرفتن اشتباه رخ داده $k$ باشد یعنی $x(x+10)=k$، با توجه به اینکه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر محاسبه شده است بنابراین حاصلضرب بدست آمده از مقدار واقعی ۴۰ واحد کوچکتر بدست آمده و حاصلضرب واقعی $x(x+10)=k+40$ بوده است.

از تقسیم $k$ بر $x$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|l} k & x \\ \hline & 39 \\ R=22 & \end{array} \quad \to k=39x+22$$

$$x(x+10)=k+40 \to x(x+10)=39x+22+40$$

$$\to x^2-29x-62=0 \to (x-31)(x+2)=0$$

$$\begin{cases}x=31\in N \to \text{عدد بزرگتر}=x+10=41\\ \qquad \to \text{مجموع دو عدد}=31+41=72\\ x=-2\notin N\end{cases}$$

### ۴۶- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: فرض کنیم او در سال $1800+y$ متولد شده باشد $(0<y<50)$، پس:

$$x^2=x+1800+y \Rightarrow x(x-1)=1800+y$$

$x$ باید عددی باشد که در یک واحد کم‌تر از خود ضرب شود حاصل از ۱۸۰۰ بیش‌تر شود که در نتیجه این عدد ۴۳ است. پس $1800+y=43\times 42$ یعنی $y=6$ و سال تولد ۱۸۰۶ است.

راه حل دوم: در جست‌وجوی عددی طبیعی هستیم که مربع آن بین ۱۸۰۰ و ۱۸۵۰ باشد فقط و فقط یک عدد چنین ویژگی را دارد و آن $۱۸۴۹ = ۴۳^۲$ می‌باشد. در نتیجه: سال تولد $۱۸۴۹ - ۴۳ = ۱۸۰۶$

**۴۷- گزینه‌ی «۱»**

برای آن‌که معادله دارای ریشه‌ی حقیقی باشد باید:

$$\Delta \ge ۰ \Rightarrow ۴\cos^۲\alpha - ۴ \ge ۰ \to \cos^۲\alpha \ge ۱ \to \cos\alpha = \pm ۱$$

$\cos\alpha = -۱$ (*) قابل قبول نیست، زیرا در آن صورت معادله ریشه‌ی حقیقی مثبت ندارد.

$$\xrightarrow{*} \cos\alpha = ۱ \xrightarrow{\text{در معادله}} x^۲ - ۲x + ۱ = ۰$$
$$\to x = ۱ \Rightarrow x'\cos^۲\alpha = ۱\times ۱ = ۱$$

**۴۸- گزینه‌ی «۲»**

$$x^۲ - (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})x + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (x - \frac{a}{b})(x - \frac{b}{a}) = ۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{a}{b}, x_۲ = \frac{b}{a}$$

توجه کنید $\frac{b}{a}$ از $\frac{a}{b}$ بزرگ‌تر است. پس:

$$\Rightarrow bx_۱ + ax_۲ = b\frac{a}{b} + a\frac{b}{a} = a + b$$

**۴۹- گزینه‌ی «۴»**

چون a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - mx + ۲ = ۰$ هستند پس حاصلضرب ریشه‌ها برابر است با $ab = ۲$، در معادله‌ی $x^۲ - px + q = ۰$، q حاصلضرب ریشه‌هاست، پس:

$$q = (a + \frac{۱}{b})(b + \frac{۱}{a}) = ab + ۱ + ۱ + \frac{۱}{ab} = ۲ + ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

**۵۰- گزینه‌ی «۱»**

اگر ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ بگیریم، آنگاه:

$x_۱ + x_۲ = a$ و $x_۱ x_۲ = b$

چون حاصلضرب ریشه‌ها b است و b عددی اول است پس فقط به خودش و ۱ قابل قسمت است لذا ریشه‌ها به‌صورت b و ۱ خواهند بود، پس مجموع ریشه‌ها $a = b + ۱$ است بنابراین $a - b = ۱$، چون a و b اولند پس $a = ۳$ و $b = ۲$ است، بنابراین مجموع ریشه‌ها $a = ۳$ است.

**۵۱- گزینه‌ی «۳»**

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آنگاه $\alpha = \frac{\beta^۲}{۲}$ و از طرفی $\alpha\beta = -\frac{۸}{۲} = -۴$، پس:

$$\alpha\beta = -۴ \Rightarrow \frac{\beta^۳}{۲} = -۴ \Rightarrow \beta = -۲ \Rightarrow \alpha = ۲$$

اما: $\alpha + \beta = \frac{m + ۱}{۲} = ۰ \to m = -۱$

**۵۲- گزینه‌ی «۴»**

چون در معادله‌ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ ضرایب معادله گویاست پس اگر یک ریشه $-۱ + \sqrt{۳}$ باشد، ریشه‌ی دیگری باید $-۱ - \sqrt{۳}$ باشد (چرا؟) بنابراین:

$$\alpha = -۱ + \sqrt{۳} \text{ و } \beta = -۱ - \sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -۲ \\ \alpha\beta = -۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta)$$
$$= (-۲)^۳ - ۳(-۲)(-۲) = -۲۰$$

**۵۳- گزینه‌ی «۳»**

چون مجموع ضرایب صفر است پس ریشه‌ها $x' = ۱$ و $x'' = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$ است. چون $\alpha > \beta$ پس $\alpha = ۱$ و $\beta = \frac{۱}{۲}$ است. پس $۵\alpha = ۵$ و $۴\beta = ۲$ پس:

$$S = x_۱ + x_۲ = ۵ + ۲ = ۷$$
$$P = x_۱ x_۲ = ۵ \times ۲ = ۱۰$$
$$\to x^۲ - ۷x + ۱۰ = ۰$$

**۵۴- گزینه‌ی «۱»**

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-(-۲)}{۴} = \frac{۱}{۲} \\ P = \alpha\beta = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

برای معادله‌ی جدید داریم:

$$P' = (\alpha + ۲\beta)(\beta + ۲\alpha) = ۵\alpha\beta + ۲(\alpha^۲ + \beta^۲) =$$
$$۵\alpha\beta + ۲((\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta) = ۵P + ۲S^۲ - ۴P = ۲S^۲ + P$$
$$= ۲(\frac{۱}{۲})^۲ + (-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow P' = \frac{m}{۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow m = ۱$$

**۵۵- گزینه‌ی «۲»**

اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، آنگاه $x' = x'' = -\frac{b}{۲a}$، در این معادله ریشه‌ها $x' = x'' = \frac{\sqrt{۲}}{a}$ خواهند بود، چون a گویا است پس ریشه‌ها گنگ هستند.

**راهبرد حل تیپ (۱۵)**

هر تابع به شکل $y = ax^۲ + bx + c$، $a \ne ۰$ نمایش یک تابع درجه‌ی دوم است در این تابع:

الف- اگر $a > ۰$ باشد، تابع می‌نیم‌دار و اگر $a < ۰$ باشد، تابع ماکزیمم‌دار خواهد بود.

ب- در این تابع، مختصات نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) برابراست با:

$$S\left(\frac{-b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$$

توجه: اگر تابع درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$، بر خط $y = k$ مماس باشد، آنگاه k عرض نقطه‌ی ماکزیمم(می‌نیمم) خواهد بود. همچنین معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف خواهد داشت.

**۵۶- گزینه‌ی «۲»**

از آنجایی که خط $y = ۷$ بر نمودار توابع مماس است پس معادله‌ی تلاقی ریشه‌ی مضاعف دارد، بنابراین:

$$-x^۲ + bx + ۳ = ۷ \Rightarrow x^۲ - bx + ۴ = ۰ \quad (۱)$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow b = ۴ \ , \ b' = -۴$$

به ازای $b = ۴$ در معادله‌ی (۱)، نقطه‌ی تماس را می‌یابیم:

$$x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۰ \to x = ۲$$

$\to A(۲, ۷)$ نقطه‌ی تماس

به ازای $b' = -۴$ در معادله‌ی (۱)، نقطه‌ی تماس را می‌یابیم:

$$x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۰ \to x = -۲$$

$\to A'(-۲, ۷)$ نقطه‌ی تماس

بنابراین فاصله‌ی دو نقطه برابر است با:

$$|AA'| = |۲ - (-۲)| = ۴$$

**راهبرد حل تیپ (۱۶)**

۱- اگر تابع $y = ax^۲ + bx + c$، $a \neq ۰$، در دو نقطه محور x ها را قطع کند، آنگاه $\Delta > ۰$ خواهد بود. در این حالت اگر:

الف- هر دو نقطه به‌طول مثبت باشند، باید:

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} > ۰ \ , \ x_۱ . x_۲ = \frac{c}{a} > ۰$$

ب- هر دو نقطه به‌طول منفی باشند، باید:

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} < ۰ \ , \ x_۱ . x_۲ = \frac{c}{a} > ۰$$

ج- یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد، باید:

$$x_۱ . x_۲ = \frac{c}{a} < ۰$$

۲- در تابع $y = ax^۲ + bx + c$، $a \neq ۰$ :

الف- اگر تابع همواره بالای محور x ها باشد، آنگاه:

$$a > ۰ \ , \ \Delta < ۰$$

ب- اگر تابع همواره زیر محور x ها باشد، آنگاه:

$$a < ۰ \ , \ \Delta < ۰$$

۳- در تابع $y = ax^۲ + bx + c$، $a \neq ۰$ :

الف- اگر تابع بر محور x ها از بالا مماس باشد، آنگاه:

$$a > ۰ \ , \ \Delta = ۰$$

ب- اگر تابع بر محور x ها از پایین مماس باشد، آنگاه:

$$a < ۰ \ , \ \Delta = ۰$$

توجه: اگر تابع درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$، بر خط $y = k$ مماس باشد، آنگاه $k$ عرض نقطه‌ی ماکزیمم(می‌نیمم) خواهد بود. همچنین معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف خواهد داشت.

**۵۷- گزینه‌ی «۳»**

با توجه به مفروضات مسأله درمی‌یابیم که معادله‌ی $۲x^۲ - ۴x + m - ۳ = ۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت دارد بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} ۱)\ \Delta > ۰ \\ ۲)\ \frac{-b}{a} > ۰ \\ ۳)\ \frac{c}{a} > ۰ \end{cases} \to \begin{cases} ۱۶ - ۸(m-۳) > ۰ \\ ۲ > ۰ \\ \frac{m-۳}{۲} > ۰ \end{cases} \to \begin{cases} m < ۵ \\ m > ۳ \end{cases} \to ۳ < m < ۵$$

**۵۸- گزینه‌ی «۱»**

در تابع درجه‌ی دوم اگر نمودار محور x ها را در دو نقطه به‌طول‌های منفی قطع کند، آنگاه:

$$\begin{cases} x'x'' > ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} > ۰ \\ x' + x'' = \frac{-b}{a} < ۰ \\ \Delta > ۰ \end{cases}$$

بنابراین در تابع داده شده:

$$\begin{cases} -\frac{۱}{a} > ۰ \Rightarrow a < ۰ \quad (۱) \\ \frac{-b}{a} = -\frac{(a+۳)}{a} < ۰ \Rightarrow a > ۰ \ \text{یا} \ a < -۳ \quad (۲) \\ \Delta = (a+۳)^۲ + ۴a = a^۲ + ۱۰a + ۹ > ۰ \Rightarrow a > -۱ \ \text{یا} \ a < -۹ \quad (۳) \end{cases}$$

از اشتراک (۱)، (۲) و (۳)، $a < -۹$ مجموعه مقادیر $a$ خواهد بود.

**۵۹- گزینه‌ی «۴»**

منحنی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع کند یعنی معادله‌ی $(m-۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱۲ = ۰$ (معادله‌ی تلاقی تابع با محور x ها) دو جواب منفی داشته باشد. برای اینکه معادله‌ی فوق، دو جواب منفی داشته باشد باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow ۴(m+۱)^۲ - ۴(m-۲)(۱۲) > ۰ \\ \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۱۲}{m-۲} > ۰ \Rightarrow m - ۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad (۱) \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲(m+۱)}{m-۲} < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۲ \quad (۲) \end{cases}$$

از آنجا که باید از مجموعه جواب‌ها اشتراک بگیریم و اشتراک مجموعه جواب‌های (۱) و (۲) تهی است، بنابراین هیچ مقداری برای $m$ وجود ندارد.

**۶۰- گزینه‌ی «۱»**

اگر منحنی درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$ محور x ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع کند، معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد، بنابراین حاصلضرب ریشه‌ها باید منفی باشد.

$$y = (m+۲)x^۲ + ۳x + ۱ - m$$

حاصلضرب ریشه‌ها $= \frac{c}{a} = \frac{۱-m}{m+۲} < ۰$

عبارت $\frac{۱-m}{m+۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

| $m$ | | $-۲$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۱-m$ | + | | + | ۰ | − |
| $m+۲$ | − | ۰ | + | | + |
| $\frac{۱-m}{m+۲}$ | − | ت ن | + | ۰ | − |

$$\frac{۱-m}{m+۲} < ۰ \Rightarrow m < -۲ \ \text{یا} \ m > ۱$$

### ۶۱- گزینه‌ی «۱»

برای این‌که نمودار تابع $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ زیر محور xها قرار گیرد باید همواره $y<0$ باشد و این در صورتی است که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$a<0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1$$

$$\Delta<0 \Rightarrow \Delta=(\sqrt{3})^2-4m(m-1)<0$$

$$\Rightarrow -4m^2+4m+3<0$$

حال عبارت $-4m^2+4m+3$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+\sqrt{64}}{2(-4)}=\dfrac{-1}{2} \\ m_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-\sqrt{64}}{2(-4)}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

| $m$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4m^2+4m+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

برای این‌که $-4m^2+4m+3<0$ باشد، طبق جدول تعیین علامت بالا باید $m>\frac{3}{2}$ یا $m<-\frac{1}{2}$ باشد. از طرفی طبق شرط اول باید $m<1$ باشد که اگر از این دو فاصله اشتراک بگیریم $m<-\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید.

### ۶۲- گزینه‌ی «۳»

برای آنکه تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ بالای محور xها باشد، باید $a>0$ و $\Delta<0$ باشد، لذا:

$$\begin{cases} a-1>0 \to a>1 \quad (1) \\ \Delta=(2\sqrt{2})^2-4a(a-1)<0 \Rightarrow 8-4a^2+4a<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2-a-2>0 \Rightarrow (a-2)(a+1)>0$$

$$\Rightarrow a>2 \text{ یا } a<-1 \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲)، $a>2$ خواهد بود.

### ۶۳- گزینه‌ی «۱»

برای آنکه نمودارهای دو تابع بر هم مماس باشند، باید معادله‌ی حاصل از تلاقی آنها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

$$\begin{cases} y=2x^2+(m+1)x+m+6 : \text{تابع مورد نظر سؤال} \\ y=x : \text{نیمساز ناحیه‌ی اول} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی تلاقی}: 2x^2+(m+1)x+m+6=x$$

$$\Rightarrow 2x^2+mx+(m+6)=0$$

برای آنکه معادله‌ی اخیر که یک معادله‌ی درجه دوم است دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، باید $\Delta=0$، پس:

$$m^2-4(2)(m+6)=0 \Rightarrow m^2-8m-48=0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ m=-4 \end{cases}$$

به ازای مقادیر به‌دست آمده برای m، ریشه‌ی معادله‌ی تلاقی که طول نقطه‌ی تماس نمودار دو تابع است را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m=12 \Rightarrow 2x^2+12x+18=0 \Rightarrow 2(x+3)^2=0 \Rightarrow x=-3 \\ m=-4 \Rightarrow 2x^2-4x+2=0 \Rightarrow 2(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

به ازای $m=12$، طول نقطه‌ی تلاقی $x=-3$ خواهد بود که در ناحیه‌ی اول قرار ندارد، با توجه به اینکه در صورت سؤال تأکید شده است نمودار تابع بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است، فقط مقدار $m=-4$ را می‌پذیریم.

**راهبرد حل تیپ (۱۷)**

برای تشخیص نمودار تابع باید سه شرط a (ضریب $x^2$)، $\Delta$ ی معادله (محل تلاقی بامحور طول‌ها) و $x=\frac{-b}{2a}$ (محورتقارن) را بررسی کنید. با محاسبه‌ی $f(0)$ می‌توان محل تلاقی نمودار را با محور عرض‌ها یافت.

نکته: برای یافتن محل تلاقی دو تابع، آن‌ها را در یک دستگاه حل کرده و طول (طول‌های) محل تلاقی را، می‌یابیم.

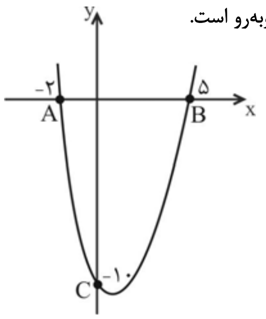
### ۶۴- گزینه‌ی «۳»

$$y=x^2-3x-10 \Rightarrow y=(x-5)(x+2)$$

$$\xrightarrow{y=0} x=-2 \, , \, x=5$$

با توجه به توضیحات بالا، نمودار محور xها را در نقاط $A(-2,0)$ و $B(5,0)$ قطع می‌کند. همچنین محور yها را در نقطه‌ی $C(0,-10)$ قطع می‌کند.

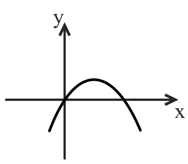
همچنین به علت مثبت بودن ضریب $x^2$، دهانه‌ی این سهمی رو به بالا باز می‌شود. بنابراین نمودار آن به شکل روبه‌رو است.




همانطور که ملاحظه می‌شود برای آن که طول نقطه‌های تلاقی نمودار سهمی با محور xها نامنفی باشند، باید نمودار را حداقل دو واحد به سمت xهای مثبت انتقال دهیم.

### ۶۵- گزینه‌ی «؟»

$$y=ax^2-(a+2)x$$




مطابق شکل، برای آن که سهمی از ناحیه‌ی دوم نگذرد، اولاً باید ماکسیمم داشته باشد، ثانیاً باید طول رأس آن نامنفی باشد، پس:

$$\begin{cases} 1)\ a<0 \\ 2)\ -\dfrac{b}{2a}\geq 0 \Rightarrow \dfrac{a+2}{2a}\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\leq -2 \cup a>0$$

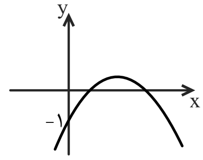
$$\xrightarrow{\cap} a\leq -2$$

**۶۶- گزینه‌ی «۱»**

ضریب $x^۲$ باید منفی باشد زیرا در غیر این‌صورت نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. بنابراین:

$a-۳<۰ \Rightarrow a<۳$

حال با توجه به اینکه $a<۳$ است، حالتی را در نظر می‌گیریم که نمودار حتماً از ناحیه‌ی اول بگذرد، سپس مجموعه‌ی جواب بدست آمده را از جواب $a<۳$ کم می‌کنیم. چون عرض از مبدأ ۱- است و $a<۳$ است (ماکزیمم دارد) پس نمودار زیر برای عبور تابع از ناحیه‌ی اول قابل رسم است.




با توجه به نمودار، شرط‌های زیر برقرار خواهند بود:

دو ریشه دارد : $\Delta>۰ \Rightarrow a^۲-۴(a-۳)(-۱)>۰$

$\Rightarrow a^۲+۴a-۱۲>۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۶)>۰$

$a>۲$ یا $a<-۶$ $\quad \mathrm{I}$

ضرب ریشه‌ها مثبت : $\frac{-۱}{a-۳}>۰ \Rightarrow a<۳ \quad \mathrm{II}$

جمع ریشه‌ها مثبت : $\frac{-a}{a-۳}>۰ \Rightarrow ۰<a<۳ \quad \mathrm{III}$

از اشتراک شرط‌های I، II و III، مجموعه‌ی مقادیر $a$ به‌صورت $۲<a<۳$ خواهد بود. یعنی اگر $۲<a<۳$ باشد نمودار حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. با کم کردن این جواب، از شرط $a<۳$ خواهیم داشت: $a\le ۲$

پس با شرط $a\le ۲$ نمودار تابع از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد.

**راهبرد حل تیپ (۱۸)**

در عبارت درجه‌ی دوم $P=ax^۲+bx+c$:

الف – اگر $\Delta<۰$ و $a>۰$، عبارت همواره مثبت است.

ب – اگر $\Delta<۰$ و $a<۰$، عبارت همواره منفی است.

**۶۷- گزینه‌ی «۲»**

تابع درجه‌ی دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت است، هرگاه:

$\Delta<۰ \;,\; a>۰$

پس در عبارت $(m-۱)x^۲+۶x+۲m+۱$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\Delta<۰ \Rightarrow (۶^۲)-۴(۲m+۱)(m-۱)<۰\\ a>۰ \Rightarrow m-۱>۰ \Rightarrow m>۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۸m^۲-۴m-۴۰>۰\\ m>۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲m^۲-m-۱۰>۰ \Rightarrow (m+۲)(۲m-۵)>۰\\ m>۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m>\frac{۵}{۲} \text{ یا } m<-۲\\ m>۱\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m>\frac{۵}{۲}$$

**۶۸- گزینه‌ی «۳»**

عبارت درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c$ همواره منفی است هرگاه: $\begin{cases}a<۰\\ \Delta<۰\end{cases}$.

بنابراین برای این که عبارت درجه‌ی دوم $(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱$ همواره منفی باشد، باید:

$$\begin{cases}\text{ضریب } x^۲<۰ \Rightarrow (a-۱)<۰ \Rightarrow a<۱ \quad (۱)\\ \Delta<۰ \Rightarrow (a-۱)^۲-۴(a-۱)<۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۱-۴)<۰\\ \Rightarrow (a-۱)(a-۵)<۰ \Rightarrow ۱<a<۵ \quad (۲)\end{cases}$$

از آن جا که اشتراک (۱) و (۲) تهی است، بنابراین این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد. پس مقداری برای $a$ یافت نمی‌شود.

**۶۹- گزینه‌ی «۴»**

$f(x)>\frac{۷}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶>\frac{۷}{۲}$

$\xrightarrow{\times ۲} -x^۲+۴x+۱۲>۷$

$\Rightarrow x^۲-۴x-۵<۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۵)<۰ \Rightarrow -۱<x<۵$

$\Rightarrow x\in(-۱\,,\,۵) \Rightarrow \mathrm{Max}(b-a)=۵-(-۱)=۶$

**۷۰- گزینه‌ی «۳»**

با ساده کردن تابع $y=x+\frac{۲}{x}$ یک معادله‌ی درجه دوم برحسب متغیر $x$ بدست می‌آید که با شرط $\Delta\ge ۰$، حدود $y$ و در نتیجه کمترین مقدار $y$ بدست می‌آید.

$y=x+\frac{۲}{x} \to y=\frac{x^۲+۲}{x} \to xy=x^۲+۲$

$\to x^۲-yx+۲=۰$

$\Delta=y^۲-۸\ge۰ \to y^۲\ge ۸ \to y\le -۲\sqrt{۲}$ یا $y\ge ۲\sqrt{۲}$

چون $y\ge ۲\sqrt{۲}$ است پس $y_{min}=۲\sqrt{۲}$ می‌باشد.

**۷۱- گزینه‌ی «۳»**

تابع دارای دو ریشه‌ی ۸ و ۲- است، بنابراین می‌توان معادله‌ی آن را به‌صورت زیر نوشت:

$f(x)=a(x+۲)(x-۸)$

از طرفی نقطه‌ی $(۰,۱۶)\in f$، پس:

$۱۶=a(۰+۲)(۰-۸) \to a=-۱$

$\Rightarrow f(x)=-(x+۲)(x-۸)$

برای یافتن مجموع ضرایب کافی است $f(۱)$ را بیابیم:

$f(۱)=-(۳)(-۷)=۲۱$

**۷۲- گزینه‌ی «۴»**

چون نمودار دارای مینیمم است، پس $a>۰$.

محل تلاقی منحنی با محور $y$ها پایین محور $x$هاست، یعنی:

$P(۰)=c<۰$

از طرفی محور تقارن تابع سمت راست محور $y$هاست، پس:

$\frac{-b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a>۰} b<۰$

$\xrightarrow{a>۰,b<۰,c<۰} abc>۰$

**۷۳– گزینه‌ی «۱»**

با توجه به نمودار تابع می‌توان گفت تابع ماکزیمم دارد $(m<۰)$ و معادله‌ی $mx^{۲}+۸x-۲=۰$ دارای دو جواب مثبت است. پس داریم:

$$\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow ۶۴+۸m>۰\Rightarrow m>-۸\\ \frac{c}{a}>۰\Rightarrow -\frac{۲}{m}>۰\Rightarrow m<۰\\ m<۰\end{cases}\Rightarrow -۸<m<۰$$

بنابراین $m$ می‌تواند مقادیر صحیح $-۷,-۶,\dots,-۱$ را داشته باشد.

**۷۴– گزینه‌ی «۳»**

تابع محور $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است پس $P(۰)=۳$ می‌باشد، بنابراین:

$$P(۰)=c=۳\rightarrow P(x)=\frac{۵}{۴}x^{۲}+bx+۳$$

در شکل داده شده عرض نقطه‌ی مینیمم سهمی $P(x)$ برابر $-۲$ است پس $\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=-۲$ می‌باشد.

$$\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=-۲\rightarrow\frac{۴\left(\frac{۵}{۴}\right)(۳)-b^{۲}}{۴\left(\frac{۵}{۴}\right)}=-۲\rightarrow\frac{۱۵-b^{۲}}{۵}=-۲$$

$$\rightarrow ۱۵-b^{۲}=-۱۰\rightarrow b^{۲}=۲۵\rightarrow\begin{cases}b=۵\\ b=-۵\end{cases}$$

با توجه به شکل محور تقارن یعنی $x=-\frac{b}{۲(\frac{۵}{۴})}<۰$، در نتیجه $b>۰$، پس $b=۵$، بنابراین $\frac{c}{b}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$.

**۷۵– گزینه‌ی «۳»**

چون تابع بر محور $x$ ها مماس است، پس عرض نقطه‌ی اکسترمم صفر است. لذا $\Delta=۰$ پس:

$$\Delta=(۳-m)^{۲}-۴m=۰\rightarrow m^{۲}-۱۰m+۹=۰$$

$$\rightarrow m=۱\,,\,m=۹$$

چون تابع می‌نیمم‌دار است. پس $m>۰$ است. از طرفی تابع باید در سمت راست محور $y$ ها بر محور $x$ ها مماس باشد. لذا:

$$m=۱\ :\ y=x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}$$

(که در $x=-۱$ بر محور $x$ ها مماس است)

$$m=۹\ :\ y=۹x^{۲}-۶x+۱=(۳x-۱)^{۲}$$

(که در $x=\frac{۱}{۳}$ بر محور $x$ ها مماس است)

**۷۶– گزینه‌ی «۳»**

$$y=a(x^{۲}-۲x+۱)+۱=a(x-۱)^{۲}+۱$$

نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم به مختصات $(۱,۱)$ است، چون عرض نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم ۱ است، پس خط $y=۱$ همواره بر نمودار مماس است.

**راهبرد حل تیپ (۱۹)**

الف- اگر مجموع ضرایب چندجمله‌ای $P(x)$ صفر باشد، آن‌گاه $x=۱$، یک ریشه‌ی معادله‌ی $P(x)=۰$ خواهد بود، اگر معادله از درجه‌ی ۳ باشد، با تقسیم آن بر $x-۱$ و یافتن خارج قسمت تقسیم، می‌توانیم ریشه‌های دیگر را بیابیم.

ب- اگر $a$ ریشه‌ی معادله‌ی چندجمله‌ای $f(x)=۰$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

ج- اگر معادله‌ی چندجمله‌ای $f(x)=۰$، دارای ریشه‌ی مضاعف $x=a$ باشد، آنگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $(x-a)^{۲}$، صفر است.

**۷۷– گزینه‌ی «؟»**

$$x^{۳}+(a-۱)x^{۲}+(۴-a)x-۴=۰$$

چون مجموع ضرایب صفر است پس یک ریشه‌ی معادله، $x=۱$ است.

پس در تجزیه‌ی عبارت طرف چپ، یک عامل $x-۱$ وجود دارد.

$$\begin{array}{l|l}
x^{۳}+(a-۱)x^{۲}+(۴-a)x-۴ & x-۱\\ \cline{2-2}
-(x^{۳}-x^{۲}) & x^{۲}+ax+۴\\ \cline{1-1}
\quad ax^{۲}+(۴-a)x & \\
\quad -(ax^{۲}-ax) & \\ \cline{1-1}
\qquad ۴x-۴ & \\
\qquad ۴x-۴ & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad ۰ &
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^{۳}+(a-۱)x^{۲}+(۴-a)x-۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x^{۲}+ax+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x^{۲}+ax+۴=۰\end{cases}$$

برای اینکه معادله، سه ریشه‌ی متمایز مثبت داشته باشد باید معادله‌ی $x^{۲}+ax+۴=۰$ دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد، پس باید:

$$\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow a^{۲}-۱۶>۰\Rightarrow a>۴\ \text{یا}\ a<-۴\\ \frac{c}{a}>۰\Rightarrow\frac{۴}{۱}>۰\\ \frac{-b}{a}>۰\Rightarrow\frac{-a}{(۱)}>۰\Rightarrow a<۰\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌ها، مجموعه مقادیر $a$ برابر است با:

$$a<-۴$$

که جواب مورد نظر طراح محترم است.

البته به ازای $a=-۵$، معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(x-۱)(x^{۲}-۵x+۴)=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۱)(x-۴)=۰$$

$$\Rightarrow(x-۱)^{۲}(x-۴)=۰$$

که این معادله یک ریشه‌ی مضاعف $x=۱$ و یک ریشه‌ی ساده‌ی $x=۴$ دارد. در صورتی که طراح ریشه‌های متمایز را می‌خواهد. پس مجموع مقادیر $a$ به صورت $(-\infty,-۴)-\{-۵\}$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

**۷۸– گزینه‌ی «۲»**

می‌دانیم ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس $x_{۱}=۲$ در معادله صدق می‌کند، لذا:

$$۲(۴a-۲-۵)=۲\Rightarrow ۴a-۷=۱\Rightarrow a=۲$$

با جاگذاری به جای $a$ در معادله داریم:

$$x(2x^2-x-5)=2 \Rightarrow 2x^3-x^2-5x-2=0$$

اما یک ریشه‌ی این معادله ۲ است، پس معادله بر $x-2$ بخش‌پذیر است، لذا با تقسیم آن بر $x-2$، عامل‌های دیگر را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-5x-2 & x-2 \\ \underline{-(2x^3-4x^2)} & \overline{2x^2+3x+1} \\ \quad 3x^2-5x & \\ \quad \underline{-(3x^2-6x)} & \\ \qquad\quad x-2 & \\ \qquad \underline{-(x-2)} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

بنابراین:

$$2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

مجموع دو ریشه‌ی دیگر از معادله‌ی $2x^2+3x+1=0$ به دست می‌آید که $x_2+x_3=\frac{-b}{a}=\frac{-3}{2}$ است.

**راهبردحل تیپ (۲۰)**

هر معادله به شکل $aw^2+bw+c=0$، $(a\neq 0)$ که در آن $w$ یک عبارت جبری است را یک معادله‌ی دومجذوری می‌نامیم. برای حل این معادله از حل معادله‌ی درجه‌ی دوم استفاده کرده (با توجه به شرایط جواب برای آن) و $w$ را می‌یابیم.

به عنوان مثال در معادله‌ی $ax^{2n}+bx^n+c=0$ با فرض $x^n=t$ $(n\in N)$ به‌معادله‌ی $at^2+bt+c=0$ خواهیم رسید، که می‌توانیم آن را حل و بحث کنیم.

**۷۹- گزینه‌ی «۲»**

معادله‌ی درجه‌ی چهارم $ax^4+bx^2+c=0$ زمانی دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز است که بعد از تبدیل آن به معادله‌ی درجه‌ی دوم، $\Delta$، $S$ و $P$ در معادله‌ی جدید هر سه مثبت باشند.

$$x^4-(m+2)x^2+m+5=0 \quad , \quad x^2=y$$

$$\Rightarrow y^2-(m+2)y+m+5=0$$

$$\Delta>0 \Rightarrow (m+2)^2-4(m+5)>0$$

$$\Rightarrow m^2+4m+4-4m-20>0$$

$$\Rightarrow m^2-16>0 \Rightarrow m<-4 \text{ یا } m>4 \quad (1)$$

$$S>0 \Rightarrow m+2>0 \Rightarrow m>-2 \quad (2)$$

$$P>0 \Rightarrow m+5>0 \Rightarrow m>-5 \quad (3)$$

از اشتراک (۳) , (۲) , (۱) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow m>4$$

**۸۰- گزینه‌ی «۲»**

$$mx-3\sqrt{x}+(m-2)=0$$

با باز نویسی معادله به صورت زیر داریم:

$$\Rightarrow m(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+(m-2)=0 \quad (*)$$

با در نظر گرفتن $\sqrt{x}=t\geq 0$، معادله‌ی $(*)$ به $mt^2-3t+(m-2)=0$ تبدیل می‌شود، اگر این معادله دارای یک ریشه‌ی نامنفی و یک ریشه‌ی منفی باشد، معادله‌ی $(*)$ فقط یک ریشه دارد می‌دانیم شرط لازم و کافی برای آنکه یک معادله‌ی درجه دوم دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامه باشد، آن است که:

$$P=t_1.t_2=\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{m-2}{m}<0 \Rightarrow 0<m<2 \quad (1)$$

هم‌چنین اگر معادله‌ی $mt^2-3t+(m-2)=0$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد نیز معادله‌ی $(*)$ فقط یک جواب دارد:

$$\begin{cases} t=\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow \frac{-(-3)}{2m}>0 \Rightarrow \frac{3}{2m}>0 \Rightarrow m>0 \\ \Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow 9-4m(m-2)=0 \Rightarrow -4m^2+8m+9=0 \\ \Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{13}}{2} \xrightarrow{m>0} m=\frac{2+\sqrt{13}}{2} \quad (2) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی مقادیر $m$ به صورت $(0<m<2)\cup\left\{m=\frac{2+\sqrt{13}}{2}\right\}$ است که تنها گزینه‌ی (۲) زیرمجموعه‌ای از آن است.

**۸۱- گزینه‌ی «۳»**

برای حل این معادله با فرض $\sqrt{x}=t>0$ به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$t^2-2t+m-1=0$$

اگر این معادله بخواهد دو ریشه‌ی مثبت متمایز داشته باشد باید:

$$\begin{cases} \Delta>0 \to 4-4(m-1)>0 \to m<2 \quad (1) \\ \frac{c}{a}>0 \to \frac{m-1}{1}>0 \to m>1 \quad (2) \\ \frac{-b}{a}>0 \to 2>0 \quad (3) \end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۲): $1<m<2$

اما اگر $m=1$ باشد، به معادله‌ی $x-2\sqrt{x}=0$ می‌رسیم که یک ریشه‌ی صفر و یک ریشه‌ی ۴ دارد. پس: $1\leq m<2$

**راهبرد حل تیپ (۲۱)**

برای حل یک نامعادله‌ی چند جمله‌ای در حالت کلی، تمامی متغیرها را به یک طرف انتقال دهید (بهتر است به ترتیبی عمل کنید که علامت بزرگ‌ترین درجه مثبت باشد) سپس عبارت را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کنید (در صورت نیاز از فاکتورگیری و تجزیه استفاده کنید)، ریشه‌های معادله را یافته و در جدول سطری ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ قرار دهید، علامت دو طرف هر ریشه را با توجه به ساده- مکرر مرتبه‌ی زوج یا مکرر مرتبه‌ی فرد بودن مشخص کنید و با توجه به جدول تعیین علامت، مجموعه جواب را بیابید.

تذکر: در تعیین علامت چند جمله‌ای $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^{2m}(x-\gamma)^{2n+1}...$ ($m$ و $n$ اعداد طبیعی)، عبارت در ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد ($\alpha$ و $\gamma$) تغییر علامت می‌دهد و در ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج ($\beta$) تغییر علامت نمی‌دهد، کافی است برای تعیین علامت کل عبارت در جدول سطری آن، یک عدد بزرگ‌تر از، بزرگ‌ترین ریشه را در عبارت قرار دهیم و علامت عبارت را در آن بازه بیابیم، سپس با توجه به نوع ریشه‌ها علامت‌های دیگر را مشخص کنیم.

توجه: در محاسبه، می‌توانیم از چند جمله‌ای‌های مثبت صرف‌نظر کنیم.

**۸۲- گزینه‌ی «۱»**

$$-1 \le 3x - 2 \le 1 \Rightarrow 1 \le 3x \le 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \le x \le 1$$

**۸۳- گزینه‌ی «۲»**

ابتدا تابع $f$ را به صورت زیر به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x^3 - x) + (4 - 4x^2)$$
$$= x(x^2-1) - 4(x^2-1) = (x-4)(x^2-1)$$
$$= (x-4)(x-1)(x+1)$$

معادله دارای سه ریشه‌ی ساده‌ی ۱- و ۱ و ۴ است، بنابراین تابع در هریک از این ریشه‌ها تغییر علامت می‌دهد، حال جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

تابع $f$ به ازای $x > -1$ در فاصله‌ی $(1, 4)$ پایین محور $x$ها قرار دارد، بنابراین $a = 1$ و $b = 4$ است، لذا:

$$b - a = 4 - 1 = 3$$

**راهبرد حل تیپ (۲۲)**
برای حل این‌گونه معادلات، ابتدا دامنه‌ی تعریف متغیر را می‌یابیم، سپس بین کسرهای داده شده مخرج مشترک می‌گیریم (معمولاً ک.م.م مخرج‌ها انتخاب می‌شود) و در انتها عبارت جبری به‌دست آمده را حل کرده و جواب‌های به‌دست آمده را در صورتی‌که مخرج کسر را صفر نکنند به عنوان جواب معادله انتخاب می‌کنیم.

**۸۴- گزینه‌ی «۳»**

فرض کنید $x$، مقدار تبخیر برحسب کیلوگرم باشد، ابتدا محاسبه می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

$$\text{وزن رنگ خالص} = 11 \times \%40 + 4 \times \%70 = 7/2 \ \text{کیلوگرم}$$

بنابراین در $15 = 4 + 11$ کیلوگرم رنگ موجود، ۷/۲ کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد، اگر $x$ میزان تبخیر باشد، آنگاه:

$$\frac{7/2}{15 - x} = \%50 = \frac{50}{100}$$
$$\Rightarrow 720 = 750 - 50x \Rightarrow x = 0/6 \ \text{کیلوگرم}$$

**راهبرد حل تیپ (۲۳)**
برای حل یک نامعادله‌ی گویا به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:
۱) عبارت‌ها را در صورت لزوم به یک طرف انتقال می‌دهیم.
۲) با مخرج مشترک‌گیری عبارت را به یک عبارت کسری تبدیل می‌کنیم، با ساده سازی، فاکتورگیری یا تجزیه‌ی صورت و مخرج، کسر را به حاصل‌ضرب عامل‌ها تبدیل می‌کنیم.
۳) با یافتن ریشه‌های صورت و مخرج و تعیین نوع آن‌ها (ریشه‌ی ساده- مکرر مرتبه‌ی زوج- مکرر مرتبه‌ی فرد)، جدول تعیین علامت سطری را تشکیل می‌دهیم. و مجموعه‌ی جواب نامعادله را می‌یابیم.
توجه: در محاسبه می‌توانیم از چند جمله‌ای‌های مثبت صرف‌نظر کنیم.

**۸۵- گزینه‌ی «۱»**

$$\frac{x-1}{x+1} > 2x \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{-2x^2-x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2+x+1}{x+1} < 0$$

صورت کسر فوق همواره مثبت است. زیرا دلتای آن منفی و ضریب $x^2$ مثبت می‌باشد، با تقسیم طرفین نامعادله بر مقدار مثبت $2x^2 + x + 1$ جهت نامساوی عوض نمی‌شود:

$$\frac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

**۸۶- گزینه‌ی «۲»**

باید نامعادله‌ی $f(x) < 2$ را حل کنیم، پس:

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2 \Rightarrow \frac{3x^2-2x}{x^2+4} - 2 < 0$$
$$\Rightarrow \frac{3x^2-2x-2x^2-8}{x^2+4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-8}{x^2+4} < 0$$

اما $x^2 + 4$ همواره مثبت است پس:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4$$

بنابراین بیشترین مقدار $b - a = 4 - (-2) = 6$ است.

**راهبرد حل تیپ (۲۴)**
در حل بعضی از معادلات گویا، با انتخاب متغیر مناسب می‌توان معادله را به شکل ساده‌تری تبدیل کرد و با حل آن معادله (که اغلب به حل معادله‌ی درجه‌ی دوم منجر می‌شود) متغیر را یافت و سپس معادله‌ی جدید را برحسب متغیر حل کرد و ریشه‌های معادله‌ی اصلی را یافت.

**۸۷- گزینه‌ی «۴»**

با فرض $x + \frac{1}{x} = t$ به معادله‌ی روبه‌رو می‌رسیم:

$$t^2 + 3t - 1 = 0$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$\Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

از آن جایی که اگر $x$ عددی حقیقی و غیر صفر باشد، آنگاه همواره $\left|x + \frac{1}{x}\right| \ge 2$، پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \xrightarrow{|t_1|<2} & \text{غیرقابل قبول} \\ t_2 = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} < -2 \Rightarrow & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = t_2 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 = t_2 x$$
$$\Rightarrow x^2 - t_2 x + 1 = 0 \quad (*)$$

از آنجا که $t_2 < -2$، معادله‌ی $(*)$ دارای دو ریشه‌ی منفی است، زیرا:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: S = \frac{-b}{a} = t_2 < 0$$

$$t_2 < -2 \Rightarrow t_2^2 > 4 \Rightarrow t_2^2 - 4 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P = \frac{c}{a} = 1 > 0$$

بنابراین معادله‌ی اولیه دارای ۲ ریشه‌ی حقیقی است.